TRATTATO COMPLETO
DI TOPOGRAFIA

DI

ACHILLE FLAUTI

ARCHITETTO CIVILE, DIRETTORE DI OPERE PUBBLICHE, MEMBRO DELL' ALBO DEGLI ARCHITETTI LEGALI DELLA GRAN CORTE CIVILE DI NAPOLI ec. ec.

NAPOLI
Dalla Stamperia della Sirena
In via S. Nicola de' Caserti n.° 47
diretta da TORTORA RAFFAELLO
1855

AL NOBIL UOMO

SIG. GENNARO VOLPICELLI

FU CAV. COSTANTINO

Socio di varie Accademie

Non avrei divisato dare alla luce questa tenue produzione de' miei studii, affrontando così la censura del pubblico per mera bramosia di gloria, o per fregiarmi dell'insigne nome di autore, se la medesima non fosse assistita e protetta dall' autorità di qualche alto personaggio.

La comun voce non meno che la bontà con la quale la sua degnissima persona si benigna discendere a conversare con chi coltiva lo spirito e si sforza rendersi utile, fan sì ch' io ardisca indirizzarmi a Lei, sicuro che tal mia operetta, portando in fronte il suo nome chiarissimo e distinto per ingegno, grado e dottrina, incontrerà con miglior fortuna la pubblica critica.

Epperò mi spero voglia Ella di buon grado accogliere questo mio lavoro cui venni spinto dal lusinghiero successo sortito da altro mio precedente sulla **MISURA**

DELLE FIGURE PIANE E SOLIDE che faceva seguito agli **ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA**, esortandola a ritenerlo qual segnale della mia devozione ed unico testimonio di gratitudine pei tanti beneficii da Lei ricevuti, non che del profondo rispetto col quale ho l'onore profferirmi — di Lei

Napoli li 28 ottobre 1854

Obbligatissimo e devotissimo servo

Achille Flauti.

Gentilissimo Signor Flauti

Desideroso sempre, nel poco che posso, d'incoraggiare il vero merito, e la nobile ambizione dei suffragi del pubblico, accetto con piacere la dedica del vostro libbro, persuaso che vi sarà in esso la conferma dell' opinione già avuta, sul vostro coltivato ingegno.

Gradite intanto i distinti saluti di

Li 2 novembre 1854

Gennaro Volpicelli

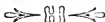
PREFAZIONE

La più parte degli autori di Geodesia non lo sono stati, a parer mio, che di talune parti di questo ramo di Geometria pratica scelte a spezzoni nella vastità delle cognizioni che nell' esteso vocabolo di Geodesia debbono contenersi, ed altri di Topografia lo sono stati invece di un misto di Geografia, di parte della Topografia, e di questo ramo della parte grafica o disegnativa. Come invero vediamo da molti trattata la Geodesia in piccoli volumi, quella scienza che dalla greca etimologia della sua voce ne fa intendere esser quella che ha per oggetto di dividere e misurare la terra, e di ritrarre le diverse figure della superficie del globo sullo sviluppo di una superficie concentrica a quella dello sferoide terrestre. Essa per necessità deve comprendere quelle della Geografia particolare o Geomorfia terrestre, della Corografia, e della Topografia. Io dunque, dopo lungo studio di tale scienza, nella quale vi fui guidato dalle premure dell' insigne astronomo professore Michele Rinonapoli, col solo desiderio d' istruirmi, ed avendo nel corso di mia professione dovuto benanche applicare le diverse teoriche in moltissime circostanze, mi son deciso, per premura di molti miei amici ingegneri, topografi ed agrimensori, a dare alle stampe un trattato completo, più che mi è stato possibile, di sola Topografia; cioè di quella parte della Geodesia che impara a ritrarre le figure di limitate estensioni di terreno in proiezione orizzontale, considerando una

piccola porzione della superficie della terra confondersi col piano tangente il punto di sua massima convessità, cioè col piano orizzontale del luogo, e secondo i rapporti di sua posizione ed estensione, cioè che impara a formare le carte topografiche. Per esse si fissano con precisione i confini dei paesi e delle proprietà particolari, si regolano le divisioni fra le famiglie, si precisano gli andamenti, le inflessioni, le asprezze del suolo con le sue produzioni, si determinano le direzioni de' corsi d' acqua, delle strade, e la disposizione delle abitazioni; per esse finalmente riceve la strategia le sue straordinarie facilitazioni, e si migliorano e facilitano i progetti d' attacco e di difesa delle truppe, che ricevono dalle stesse guida più certa.

Ho procurato di esser breve senza divenire oscuro, e particolarmente ho avuto di mira un ordine singolare tanto necessario per un libro d' istituzione, di cui ne ho visto la deficienza, nè ho fatto parola della parte disegnativa, mentre, dopo la pubblicazione degli esemplari di topografia del distinto Architetto Gaetano Palermo, non evvi altro a desiderare. Sarà desso diviso in quattro parti; nella prima esporrò, concisamente dimostrandole, quante formole trigonometriche possono necessitare per la chiara intelligenza dell' opera, ed esporrò la costruzione e l'uso de'diversi strumenti che si adoperano in topografia per levar le piante de' diversi terreni, nella seconda parlerò della Planimetria, nella terza dell' Agrimensura, nella quarta finalmente degli strumenti per la livellazione, di questa, e degli scandagli.

PARTE PRIMA

Delle nozioni di Trigonometria rettilinea, delle scale, e degli strumenti dei quali si fa uso in Topografia per legare le piante dei diversi terreni.

SEZIONE I.

Nozioni di trigonometria rettilinea da servire nel presente Trattato.

1. Dall' esposto nella Trigonometria rettilinea del mio ottimo Zio Cav. Vincenzo Flauti ricavo quanto segue in modo generale ed analitico.

RISOLUZIONE ANALITICA DE' TRIANGOLI RETTILINEI.

2. Chiamando a, b, c i tre lati, ed A, B, C gli angoli ad essi opposti di un qualunque triangolo, sappiamo dalla geometria essere $a^2 = b^2 + c^2$ meno il doppio rettangolo di un de' lati che comprendono A per esempio b, nella proiezione di c su di b, e poichè questa uguaglia c cos. A, sarà perciò

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c \cos.\ A \quad . \quad . \quad (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c \cos.\ B \quad . \quad . \quad (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b \cos.\ C \quad . \quad . \quad (3)$$

Queste tre equazioni, contenendo i sei elementi del triangolo rettilineo, sono atti a risolvere il seguente problema.

Dati tre elementi di un triangolo rettilineo, trovare i rimanenti.

Fra questi l'è d'uopo eccettuarne il caso in cui sieno dati i tre angoli perchè, essendo la loro somma costante, il problema è indeterminato.

3. Per avere tutt' i casi che ammette questo problema conviene fare le combinazioni a tre a tre delle sei lettere A, B, C, a, b, c che sono venti, ma riunendo le simili si riducono a sei cioè.

Dati i tre angoli
i tre lati
due lati ed un angolo opposto ad uno di essi
due angoli ed un lato opposto ad uno di essi
due lati e l'angolo da essi compreso
due angoli e il lato adiacente.

Della soluzione del primo caso si è fatto conoscere l'impossibilità, resta a cercare delle formole che danno la soluzione dei rimanenti.

Riducendosi il problema a trovare un' elemento incognito quando sono noti gli altri tre, per venire alla invenzione delle formole che completamente risolvono il problema, converrà fare le combinazioni a quattro a quattro dei sei elementi, le quali sono quindici, ma riunendo le simili si riducono alle quattro seguenti.

Fra tre lati ed un angolo
due lati e gli angoli opposti
due lati e due angoli, l'uno compreso e l'altro opposto
tre angoli ed un lato.

La prima di queste relazioni è data dalle equazioni (1, 2, 3) passiamo però a trovare le altre.

4. Essendo sen.^{2} A$=1-$ cos.^{2} A: ma (1) cos. A$=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

sarà quindi

$$\text{sen.}^2\,A = \frac{4c^2b^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a-b-c)}{4\,b^2\,c^2}$$

facendo $a+b+c=2p$, dividendo per a^2 ed estraendo la radice

si ottiene $\dfrac{\text{sen. A}}{a}=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a\,b\,c}$

un identico valore si ha, com' è chiaro per $\dfrac{\text{sen.B}}{b}$ e $\dfrac{\text{sen.C}}{c}$; sarà

perciò $$\frac{\text{sen.A}}{a}=\frac{\text{sen.B}}{b}=\frac{\text{sen.C}}{c} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

la relazione richiesta fra i lati e gli angoli opposti di un triangolo rettilineo.

5. Le equazioni (4) si possono mettere sotto la seguente forma

$$a=\frac{b\text{ sen. A}}{\text{sen. B}}=\frac{c\text{ sen. A}}{\text{sen. C}}$$

$$b=\frac{a\text{ sen. B}}{\text{sen.A}}=\frac{c\text{ sen.B}}{\text{sen.C}}$$

$$c=\frac{a\text{ sen. C}}{\text{sen. A}}=\frac{b\text{ sen. C}}{\text{sen. B}}$$

Ed osservando essere $\text{A}=\pi-(\text{B}+\text{C})$, $\text{B}=\pi-(\text{A}+\text{C})$, $\text{C}=\pi-(\text{A}+\text{B})$, si avrà

$$a=\frac{b\text{ sen.}(\text{B}+\text{C})}{\text{sen. B}}=\frac{c\text{ sen.}(\text{B}+\text{C})}{\text{sen. C}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$b=\frac{a\text{ sen.}(\text{A}+\text{C})}{\text{sen.A}}=\frac{c\text{ sen.}(\text{A}+\text{C})}{\text{sen.C}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$c=\frac{a\text{ sen.}(\text{A}+\text{B})}{\text{sen. A}}=\frac{b\text{ sen.}(\text{A}+\text{B})}{\text{sen. B}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Sviluppando sen. (A+B), sen. (A+C), sen. (B+C) e riducendo si ha

$$\text{cos.C}=\frac{a}{b}-\text{cot.B sen.C}=\frac{b}{a}-\text{cot. A sen. C.} \quad \ldots \quad (5')$$

$$\text{cos.B}=\frac{a}{c}-\text{cot.C sen.B}=\frac{c}{a}-\text{cot. A sen. B} \quad \ldots \quad (6')$$

$$\cos. A = \frac{c}{b} - \cot. B \operatorname{sen} A = \frac{b}{c} - \cot. C \operatorname{sen}. A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

che è la terza relazione.

6. Oltre l'esposte relazioni fra i lati e gli angoli di un triangolo rettilineo, se ne possono avere delle altre, ne esporremo qui appresso una utilissima.

Prendiamo le equazioni $\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}. A}{\operatorname{sen}. C}$, $\frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. B}{\operatorname{sen}. C}$, dalle quali si ottiene $\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}. C}$ ed $\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}. C}$ e trasformando le somme e differenze de' seni in prodotti, ed osservando essere sen. $C = 2 \operatorname{sen}. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} C$, si avrà

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. \frac{1}{2}(A-B) \cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} C}$$

ovvero

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}. \frac{1}{2} C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}. \frac{1}{2}(A-B)}{\cos. \frac{1}{2} C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Queste formole corrispondono a quelle della trigonometria di Gauss, e danno due lati del triangolo quando è dato il terzo lato, l'angolo ad esso opposto e la differenza degli altri angoli; e dividendo la prima per la seconda, danno la rimarchevole analogia

$$a+b : a-b :: \operatorname{tang}. \frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang}. \frac{1}{2}(A-B)$$

7. Questo problema è un caso particolarissimo del precedente, generalmente risoluto: in questo si suppone che un angolo p. e. A sia $= 90^\circ = q$.

I casi che esso ammette sono i seguenti, come rilevasi dal n.° 2.

Dato

l'ipotenusa ed un cateto.

l'ipotenusa ed un angolo acuto, od un cateto e l'angolo ad esso opposto.

un cateto e l'angolo adiacente.

E qui è da osservarsi che quando è dato uno degli angoli acuti è contemporaneamente dato anche l'altro, per modo che se sia dato B si avrà $C = q - B$

8. Per avere le formole necessarie alla risoluzione di questo problema, prendiamo quelle delle formole generali che contengono l'angolo A, e riduciamole, facendo in esse $A = q$. Le formole (1), (4), (5'), (6'), (7'), si trasformeranno nelle seguenti

$a^2 = b^2 + c^2$ . . . . (1)'

$b = a$ sen. B, $c = a$ sen. C. . . . . (4)'

$b = a$ cos. C, $c = a$ cos. B. . . . . . . (5' e 6')'

$b = c$ tang. B, $c = b$ tang. C. . . . . (7')'

Passiamo alla soluzione effettiva del problema

9. Cas. 1.° Dato a e b, trovare B, C, c.

Si avrà sen. $B = \frac{b}{a}$, $C = q - B$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)\,(a-b)}$

Cas. 2.° Dato a e B, trovare C, b, c.

Si ha $C = q - B$, $b = a$ sen. B, $c = a$ cos. B

Oppure dato b e B, trovare C, a, c

Si ha $C = q - B$, $a = \frac{b}{\text{cos. C}}$, $c = b$ tang. C

Cas. 3.° Dato b, e c trovare B, C, a.

Si ha tang. $B = \frac{b}{c}$, $C = q - B$, $a = \frac{b}{\text{sen. B}}$

Cas. 4.° Dato b, e C, trovare B, a, c

Si avrà $B = q - C$, $a = \frac{b}{\text{cos. C}}$, $c = b$ tang. C

10. Cas. 1. Dato a, b, c, trovare A, B, C.

Questi angoli vengono dati dalle equazioni (1), (2), (3) le quali però essendo poco comode pel calcolo de' logaritmi, le trasformeremo facilmente, facendo

$\cos. A = 1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$ ed avremo $a^2 = (b-c)^2 + 4bc \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A$

d' onde $4bc \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} A = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$ e facendo $a+b+c=2s$ e prendendo il valore di $\text{sen.} \frac{1}{2} A$, si ottiene

$$\text{sen.} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Ponendo in vece di cos. A, $2 \cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$ ed operando nello stesso modo si avrà

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \text{ dalle quali}$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

In simil modo si potranno avere $\text{sen.} \frac{1}{2} B$, $\cos. \frac{1}{2} B$ ec. sicchè le formole che risolvono il problema sono

$$\text{sen.} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\text{sen.} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \cos. \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-a)}{ac}},$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\text{sen.} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

che danno i valori di A, B, C, l'uno indipendentemente dall'altro.

E giova avvertire che, dovendo trovare tutti e tre gli angoli, conviene servirsi delle formole delle tangenti, non abbisognando che quattro logaritmi.

Cor. Se il triangolo sia isoscele e sia $b=a$, le nostre equazioni si riduranno a

$$0=c-2a \cos.A$$

. . . .

$$c^2=2a^2(1-\cos.C)=4a^2\text{sen.}^2\frac{1}{2}C,$$ d'onde

$\cos.A=\cos.B=\frac{c}{2a}$ e $\text{sen.}\frac{1}{2}C=\frac{c}{2a}$, cioè $\cos.A=\cos.B=\text{sen.}\frac{1}{2}C$ ed

$\frac{1}{2}C=90-A$, come si ha dalla geometria.

11. Cas. 2.° Dati a, b, A, trovare c, B, C

Bisognerà trovare tre relazioni fra $abAc$, $abAB$, $abAC$, che sono $a^2=b^2+c^2-2bc\cos.A$, $\frac{b}{a}=\frac{\text{sen.B}}{\text{sen.A}}$, $b=\frac{a\,\text{sen.}(A+C)}{\text{sen.A}}$

Dalla prima equazione si ricava

$$c=b\cos.A\pm\sqrt{(A+a^2-b^2)}=b\cos.A\pm\sqrt{(a^2-b^2\,\text{sen.}^2A)}\;.\;.\quad(\alpha)$$

dalle rimanenti si ottiene $\text{sen.B}=\frac{b}{a}\text{sen.}A$ . . . . (β)

$\text{sen.}(A+C)=\frac{b}{a}$ . . . . (φ)

Da queste equazioni si ha sen. B = sen. (A + C) che dimostra che il valore di B è ambiguo, potendosi prendere B ed A + C $=\pi-B$; quest'ambiguità è dimostrata anche dal doppio valore di c.

In molti casi però le due soluzioni che può avere il problema si riducono ad una sola e questi possiamo dedurli dall'equazione (α)

Ed in prima si osservi non doversi considerare i valori negativi di c, dovendosi trovare i valori effettivi di c: di più non considereremo i casi di $A=q$, e di $A>q$, ne'quali si sa essere sì B, che $C<90°$ e quindi cessa l'ambiguità.

Nel caso adunque di $A<q$.

1°. Quando $a=b$ sen. A vi sarà una soluzione e però sarà

$c = b$ cos. A, sen. B=sen. (A+C)=1 e B=A+C=q, cioè che l'angolo B è retto, verità che ci vien dimostrata da' valori de' cateti c, a, cioè quando a eguaglia la perpendicolare che si abbassa sul lato c il problema ha una sola soluzione.

2°. Quando $a < b$ sen. A, il lato a in questo caso è minore della perpendicolare abbassata dal vertice C su di c, il problema è impossibile come si ha dalla geometria, e tale ce lo dimostra anche l'equazione (α).

3°. Quando $a = b$ il problema ha una soluzione cioè sarà $c = 2b$ cos. A, e B = A : e lo stesso si ha delle considerazioni geometriche, essendo il triangolo in questo caso isoscele.

4°: Quando $a > b$, la quantità $\sqrt{(b^2 \cos^2 C + a^2 - b^2)} > b$ cos. A e si avrà una soluzione.

5°. Finalmente quando $a < b$, il radicale sarà $< b$ cos. A e si avranno due soluzioni.

In ogni caso conviene sempre trovare uno degli angoli e poi trovare c per la proporzione dei seni, non potendosi al valore di c applicare il calcolo de' logaritmi.

Cor. Le formole pel caso che il triangolo sia isoscele sono già date nel caso 3.° di questa discussione.

12. Caso 3:° Dati A, B, a, trovare C, b, c.

Si avrà C = π — (A+B) e gli altri due elementi si hanno

$$\text{dalle equazioni } \frac{\text{sen.B}}{\text{sen.A}} = \frac{b}{a}, \quad c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}}$$

Cor. Se A=B sarà $b = a$, e $c = 2\, a$ cos. A.

13. Cas. 4. Dati b, c A, trovare B, C, a,

Dobbiamo scegliere fra ABC abc le seguenti relazioni (7'), (1)

$$\text{cos.A} = \frac{c}{b} - \text{cot. B sen. A}, \quad \text{cos. A} = \frac{b}{c} - \text{cot. C sen.A},$$

$$a^2 = b^2 + c^2 2bc \text{ cos. A dalle quali si ha cot. B} = \frac{c - b \text{ cos. A}}{b \text{ sen. A}} \quad . \quad (\varphi)$$

$$\text{cot. C} = \frac{b - \text{cos. A}}{c \text{ sen. A}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\psi)$$

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \text{ cos. A})} \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

Per ridurre le formole (φ) e (ψ) al calcolo de' logaritmi, si faccia nella prima b cos. A=ω e nella seconda c cos. A=ω' ed

esse diverranno $\tan g.\ B = \frac{b\ \text{sen.}A}{c-\omega}$ e $\tan g.\ C = \frac{c\ \text{sen.}A}{b-\omega}$

Per ridurre l'equazione (ζ) si osservi che $2\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A = 1\ \cos. A$, e prendendo da questa equazione il valore di cos. A, sostituendolo e riducendo si ottiene

$$a^2 = (b-c)^2 + 4\, bc\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} A$$

facendo ora $\frac{4bc\text{sen}^2\ {}^1/_2\ A}{(b-c)^2} = \tan g.^2\ \omega''$ si avrà

$$a^2 = (b-c)^2 (1 + \tan g.^2\ \omega'') = \frac{(b-c)^2}{\cos.^2 \omega''}\ ;\ \text{ed}\ a = \frac{b-c}{\cos. \omega''}$$

14. Le equazioni adunque che risolvono il problema sono

$$\omega = b \cos. A,\ \tan g.\ B = \frac{b\ \text{sen.}\ A}{c-\omega}$$

$$\omega' = c \cos. A,\ \tan g. C = \frac{c\ \text{sen.}\ A}{b-\omega}$$

$$\tan g.\ \omega'' = \frac{2\ \text{sen.}\ {}^1/_2\ A\sqrt{bc}}{b-c}\ ,\ a = \frac{b-c}{\cos.\ \omega''}$$

15. Cor. Se $b = c$ si ha $\cot. B = \cot. C = \frac{1-\cos.\ A}{\text{sen.}A} = \tan g.\ \frac{1}{2} A$ ed

$$a = \sqrt{2b^2 (1-\cos.\ A)} = 2b\ \text{sen.} \frac{1}{2}\ A.$$

16. Scol. Quando debbonsi determinare tutti e tre gli elementi, è più comodo servirsi della formola $\tan g. \frac{1}{2} (B-C) = \frac{b+c}{b-c} \cot. \frac{1}{2}\ A$ la quale farà noto $\frac{1}{2}$ (B—C) che addizionato ad $\frac{1}{2}$ (B+C) darà B, e sottratto darà C: il lato a si ha dall'equazione

$$a = (b-c) \frac{\cos.\ \frac{1}{2}\ A}{\cos. (B-C)}$$

17. Scol. Spesse volte avviene, e particolarmente nel calcolo de' triangoli geodesici, che i lati b e c sono dati pei loro logaritmi; in questo caso si ha il valore di $\frac{1}{2}$ (B—C) senza trova-

re i valori di b e c in numeri. In fatti, essendo

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C})=\frac{b-c}{b+c}\cos.\frac{1}{2}\text{A}, \text{ mettendo } \frac{b}{c}=\text{tang.}\,\omega, \text{ sarà}$$

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C})=\frac{\text{tang.}\,\omega-1}{\text{tang.}\,\omega+1}\cot.\frac{1}{2}\text{A}=\text{tang.}(\varphi-45^\circ)\cot.\frac{1}{2}\text{A}$$

18. Cas. 5.° Dati A , B , c, trovare a , b , C.
Essendo dati A e B sarà dato anche C , quindi il problema si riduce al caso 3.°

SEZIONE II.

Delle scale

19. Dicesi scala di un disegno topografico una determinata lunghezza per la quale possono aversi delle dimensioni , che serbino alle corrispondenti distanze prese sul terreno un determinato rapporto. In modo che se L indica una lunghezza sul terreno ed l quella corrispondente sul disegno , che si voglia serbi alla prima la ragione di 1 : M , l'espressione della scala sarà $\frac{l}{\text{L}}=\frac{1}{\text{M}}$ dalla quale si può prontamente determinare una delle tre quantità, conoscendone le altre due. Se invece fosse dato il corrispondente rapporto 1 : M² che la superficie del disegno debba serbare a quella del terreno, è chiaro che si avrà $\frac{l^2}{\text{L}^2}=\frac{1}{\text{M}^2}$ e quindi di nuovo si tornerebbe alla generale espressione della scala $\frac{l}{\text{L}}=\frac{1}{\text{M}}$. Il rapporto di $\frac{1}{\text{M}}$ suol per facilitazione rappresentarsi per un fratto che abbia sempre l'unità per numeratore e di cui il denominatore si esprime in cifre , in guisa che se la scala fosse di $\frac{1}{1000}$ si avrebbe $l=\frac{\text{L}}{1000}$, ovvero ciascuna lunghezza sul disegno , che si ottenga con tale scala , sarebbe uguale alla millesima parte della corrispondente sul terreno , e la superficie del disegno sarebbe 1,000,000 di volte più piccola della vera.

20. Prima intanto di passare alla costruzione delle diverse sca-

le', osserviamo che del pari, che mediante la formola $\frac{l}{L}=\frac{1}{M}$ si è ottenuto il valore di $\frac{l}{L}$, dimensione che serba all'omologa sul terreno la ragione di 1 : M e però essa è il disegno eseguito e risultato alla scala di $\frac{1}{M}$; se debbasene eseguire altro per portarlo alla scala di $\frac{1}{M'}$, e però vogliasi conoscere la lunghezza l' omologa alla stessa L sul terreno, si avrà similmente $l=\frac{L}{M}$ e poichè queste due equazioni danno $lM=l'M'$ ne risulta che $l'=l\frac{M}{M'}$ equazione che dà il valore di l' per copiare, ridurre ed ingrandire il dato disegno, facendo M' rispettivamente uguale, maggiore o minore di M; mentre se $M=M'$ si ha $l=l'$ ed il primo disegno sarà uguale al secondo, se M si faccia uguale a $2M'$, $3M'$, $4M'$, ec. si ha rispettivamente $l'=2l$, $l'=3l$, $l'=4l$ ec. e 'l disegno risulterà doppio, triplo, o quadruplo ec.: se finalmente invece si supponga M' successivamente uguale a $2M$, $3M$, $4M$ ec. si avrà $l'=\frac{l}{2}$, $l'=\frac{l}{3}$, $l'=\frac{l}{4}$ ec. e 'l disegno diverrà la metà, la terza, la quarta parte rispettivamente del primo.

21. La più semplice costruzione delle scale è quella che si ha dividendo una retta in parti uguali, ognuna delle quali potrà rappresentare una qualunque misura o canna, o passo, o metro, di cui i moltiplici e summoltiplici esprimeranno però i corrispondenti di tal misura, il solito è che ognuna rappresenti 100 palmi e quindi dividendo una di queste in 10 parti, ognuna di esse, nella nostra ipotesi, sarà di 10 palmi, ed un palmo sarà espresso dalla decima parte di una di quest' ultime. Se dunque si volesse costruire una scala di $\frac{1}{10000}$, ed a cagion d'esempio, l'unità di misura fosse il metro, basta riflettere che
1 metro sul disegno = 10000 metri sul terreno, e però
Om, 1 = ... 1000, e così pure
Om, 01 = ... 100 e
Om, 001 = ... 10

*

22. Ma questa scala non si presta per dare esattamente le piccole divisioni, come le frazioni dell'unità; però dai pratici si fa uso della *scala delle trasversali*, o *di decime*, o dal nome dell'inventore, *scala ticonica*, *o ticoniana*. La costruzione di essa risulta dalla seguente verità geometrica. Le rette AB, AC, AD, (*fig. 1*) che partendo da un punto A tagliano le parallele, BD, *bd*, le segano proporzionalmente; cioè sarà BC : *bc* :: CD : *cd* :: AC : *ac*. Per conseguente se *Ac* è la parte n.esima di AC, lo sarà anche la *bc* della BC, e la *cd* della CD.

Ciò premesso la A B (*fig.* 2) rappresenti una lunghezza di 100 palmi e si vogliano le piccole frazioni di essa; dividasi la AB in 10 parti uguali fra loro ne' punti 90, 80, 70. . . . . . dall'estremo A s'innalzi la AC perpendicolare ad AB e di arbitraria lunghezza, si compia il rettangolo AD. Divisa la AC in 10 altre parti uguali fra loro A1, 12, 23. . . . . . . pei punti delle divisioni si conducano le parallelle alla AB e per gli altri punti 10, 20, 30. . . . le parallele alla AC e le trasversali C9*o*, E8*o* . . . . . È chiaro, che essendo AC : C9 :: A90 9*a*, ed è C9 $= \frac{1}{10}$ AC, sarà 9*a* $= \frac{1}{10}$ A 90 $=$ 1 palmo, così sarà 8*b* $=$ 2 palmi ec. Quindi è chiaro il modo di servirsi di questa scala, mentre basta portare sulla scala di un disegno una lunghezza presa su di esso col compasso per conoscere prontamente quella reale cui corrisponde sul terreno, così volendosi palmi 92, questi saranno designati dalla x h : volendosi lunghezze maggiori di 100 palmi, basta prolungare la AB e tagliare su di essa da B le parti BF, FG. . . uguali ad AB, e completare la figura nel modo come si osserva, per modo che palmi 267 saranno rappresentati dalla lunghezza Z*z*. Desiderando i decimi del palmo, ec. basta dividere ciascuna delle A1, 12 ec. . . . . in dieci parti uguali e tirare pe' punti delle divisioni le parallele alla AB.

23. Ed è chiaro che, servendo le descritte scale per ridurre in piccolo foglio le grandi estensioni di terreno in modo che le figure ridotte sieno simili e proporzionali alle effettive, le parti di una scala debbano essere nella ragione inversa della massima lunghezza della superficie, e nella diretta di quella del foglio.

L'esatta divisione delle scale è di somma importanza, dipendendo da questa l'esattezza del disegno.

Più si moltiplicano gli errori, e più divengono di conseguenza; si badi adunque all' acuminatezza delle punte del compasso ed alla precisione nel segnare le parallele.

24. L'è opportuno esaminare quali sieno i limiti degli errori trascurabili nelle misure prese sul terreno, secondo le diverse scale adottate pe' disegni di questi.

Sia $\frac{4}{10000}$ li palmo l' errore grafico tollerabile nel disegno, ovvero da non potersi valutare sulla scala, e che Δ sia l'errore massimo che possa commettersi misurando sul terreno una lunghezza. Dovendo essere $\frac{l}{L}=\frac{1}{M}$ si ha $\frac{l+\frac{4}{10000}}{L+\Delta}=\frac{l}{M}$

ovvero $M\left(l+\frac{4}{10000}\right)=L+\Delta$. Ma $L=Ml$,

che però risulta $Ml+\frac{4\,M}{10000}=Ml+\Delta$, d' onde $\Delta=\frac{4\,M}{10000}$ val quanto dire che il massimo errore tollerabile nelle misure che si prendono sul tereno è di $\frac{4}{10000}$ di M; che però il massimo errore di cui può non tenersi conto alle scale di $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$; $\frac{1}{20000}$ è rispettivamente di 1, 2; 4, ed 8 palmi.

25. Infiniti sono i rapporti che possono aver luogo tra un terreno e 'l rispettivo disegno; pure l'uso, l' esperienza e 'l buon gusto in tali lavori, hanno quasi generalmente stabilito alcune norme nella scelta delle scale, secondo i diversi disegni. Pe' lavori topografici si adopera quindi quella di $\frac{1}{10000}$, pe' lavori particolari, come di fortificazioni di campagna, piazze forti, canali, strade ec. - . si è ritenuta quella di $\frac{1}{2000}$ o di $\frac{1}{3000}$ e s di grande estensione, quelle di $\frac{1}{5000}$

26. Per ridurre un disegno, o per ingrandirlo si può facilmente operare con un *angolo di riduzione*. Sia AB (*fig. 3*) uguale ad una delle più lunghe linee del disegno di cui altro se ne di-

mandi cui il primo serbi la data ragione di $M^2 : M'^2$, s' inclini a questa in un suo estremo B la retta BC con un angolo quasi retto e di tal lunghezza che stia AB : BC :: M : M', congiunti i punti A, C, è chiaro che le nuove distanze AD, AD' sarebbero espresse dalle corrispondenti DE, D' E' parallele alla BC. Può finalmente adoperarsi il *compasso di riduzione* di cui noi trascuriamo la descrizione, riguardando piuttosto la parte disegnativa, che la scientifica di che unicamente ci occupiamo, e per la medesima ragione in seguito non parleremo del *Pantografo*, nè del *Micografo* o *Prosopografo* due strumenti che servono per ridurre con facilitazione un disegno in altro che gli serbi data ragione.

27. Volendosi inoltre la stessa lunghezza l' omologa all' altra l del dato disegno in modo, che la superficie di questa S debba serbare a quella risultante S' la ragione di M: M', invece di essere data la ragione di due parti omologhe, si ha $S : S' :: l^2 : l'^2 :: M : M'$ donde $l' = l \sqrt{\frac{M}{M'}}$. Tale espressione può costruirsi nel seguente modo.

Si esponga un semicerchio A D B (*fig. 4*) di cui il diametro AB si divida in C, in modo, che stia AC : CB :: M : N; per C s' innalzi la CD perpendicolare alla AB prolungata fino ad incontrare la semicirconferenza in D e si congiungano le AD, BD. Chiamando S, S' le superficie de' rispettivi triangoli simili ADC, DCB, che avendo la stessa altezza son fra loro come le basi, si ha S:S' :: AC : BC, e sta S : S' :: $AD^2 : AB^2$, sarà $AD^2 : BD^2$ :: AC : BC :: M : N. Se dunque i lati di due disegni si stabiliscano sul rapporto di AD : BD, si sarà risoluto il problema.

Si trasporti adunque la lunghezza l da D sulla D A, e dall' estremo G menando la parallela alla A B, il punto G' segnerà sulla DB, la DG' richiesta uguale ad l'. È chiaro, che se AC sia uguale al lato del quadrato, la linea richiesta sarebbe DC, mentre in tal caso questa risulterebbe uguale alla DG', e sarebbe più semplice la costruzione.

28. Per ridurre ad una scala diversa un disegno di qualche estensione, è utile sistema di covrirlo con una rete di quadrati o rettangoli piccoli in ragione della complicazione del disegno dato, eseguire inoltre sul nuovo foglio una simile rete in lapis ed in modo,

che i quadrati o rettangoli si serbino tra loro un dato rapporto, e quindi segnare sul foglio le minute particolarità che si trovano in ciascun di essi, suddividendone se occorra, i lati in quante parti conviene, congiungendone i punti delle stesse divisioni eseguite ne' lati opposti, o tirandovi le sole diagonali.

Si rileva dal §. 19 come si possa costruire un quadrato che serbi ad un altro dato una determinata ragione; mentre se il lato del quadrato dato sia L ed il rapporto che tal quadrato debba serbare a quello che si cerca sia di M^2: 1, l'equazione $\frac{l^2}{L^2}=\frac{1}{M^2}$ offre il valore del lato l del chiesto quadrato, essendo $l=\frac{L}{M}$ in modo che se il rapporto che la superficie del chiesto quadrato debba serbare a quella del dato si voglia di 1:4, si avrà $l^2=\frac{L^2}{4}$ ed $l=\frac{\sqrt{L^2}}{4}=\frac{L}{2}$

Resta solo a vedere come si possa costruire un rettangolo che serbi ad un altro dato una determinata ragione.

Siano A, B i due lati del dato rettangolo ed x, y quelli che si cercano di altro che debba serbare al primo una determinata ragione, ovvero di cui si voglia la superficie$=m^2$; sarà $A:B::x:y$ (1)
ed è poi $xy=m^2$ . . . . (2)
che però $x=\frac{Ay}{B}$, e tal valore tratto dalla (1), sostituito nella (2) dà

$$\frac{Ay^2}{B}=m^2\text{, d' onde } y=\sqrt{\left(\frac{B}{A}m^2\right)},$$

qual valore di y, determinato e sostituito nell' espressione di x, darà l' effettivo valore di questo.

SEZIONE III.

Degl' istrumenti dei quali si fa uso in Topografia per levare le piante de' diversi terreni.

29. DELLA CATENA METRICA. È questa una catena per lo più della totale lunghezza di palmi 50 formata di maglie bislunghe in filo di ferro, ciascuna di circa un palmo, collegate fra loro con un anello di ferro, o con una piastra di altro metallo, nel qual caso su ciascuno di queste vien segnato il numero esprimente i palmi che sono dal posto di essa al principio della catena. Con più grandi anelli sono segnate le divisioni decimali della catena, o sopra più grandi piastre a tali punti stabiliti sono marcati i numeri corrispondenti con decupla progressione. In simil guisa è bene che sia contraddistinto il punto medio della catena, cioè il termine di 25 palmi dal principio di essa. Un estremo della catena è terminato da un anello di ottone che ne fa parte nel quale può introdursi la punta di ferro di un bastone per ficcarlo a terra terminato da una piccola traversa anche di ferro per sostenere la stessa, e l'altro estremo è terminato da un ferro piegato a punta che serve per segnare sul terreno il termine di ciascuna catena. Per usare la medesima è chiaro che basta distenderla successivamente sul terreno, orizzontale o quasi orizzontale e fino a che dal punto di partenza siasi giunto esattamente o con porzione di essa a quello estremo della lunghezza di cui si volea la misura, caminando per la direzione della stessa; che però conoscendosi il numero de' palmi che contiene ogni catena e quelli che si contengono in qualche porzione di essa, si conoscerà il numero di quelli dell'intera misura cercata. L'estremo di una distanza a misurarsi ed anche alcun punto nell'allineamento di questa è d'uopo marcare, in mancanza di segni fissi naturali, con delle *biffe*, *paline*, *mire* o *picchetti*, che sono delle aste di legno o delle canne dritte che si piantano verticalmente nel terreno con un loro estremo terminato a punta. Per non commettere alcun errore nel numerare le catene, l'uomo direttore della misura terrà in mano il bastone ed allineerà l'altr'uomo, che distenderà la catena con l'oggetto cui questa è diretta, e tal secondo misuratore nel partirsi dal suo estremo per andar quindi avanti trascinandola dità

a voce alta *una*, *due* ec. indicando il numero di catene misurate fino a quel punto. L'uomo direttore allora seguirà l'altro e, giunto al segno fatto dal primo, vi unirà bene l'estremo della catena e così si proseguirà la misura. È anche meglio però il sistema che il secondo uomo porti in mano de' chiodi, che fisserà normalmente al terreno in ciascun suo estremo ove griderà *muta*, i quali chiodi verranno raccolti dal compagno che lo segue ed è chiaro allora che, tenuto un esatto conto de' chiodi e quanti ne avrà l' uomo direttore, vi si aggiunga il tratto di catena che arriva alla palina od istrumento, e se ne avrà il totale. Prima di usar la catena è necessario verificare la sua lungbezza con altra conosciuta e si rettificherà la misura operando una seconda volta in senso contrario alla prima: si avverta che le maglie della catena non abbiano in alcun punto ad accavallarsi. L' esattezza della catena è soffribile pe' lavori topografici: talvolta si suole usare la catena di palmi 50, 25 per compensare l' errore in meno, mentre per esperienza si è approssimativamente trovato $\frac{1}{2}$ per 100:

Tal modo di operar la catena può aver luogo in piano, ma in sito montuoso od inclinato è necessario, per avere la proiezione orizzontale delle diverse distanze, di tenerla quanto più si può orizzontale e determinando sul terreno con un filo a piombo abbassato dall' estremo di ciascuno di esse, il punto ove dovrà piazzarsi successivamente il principio della stessa, qual punto potrà pure determinarsi lasciando cadere una pietruzza da' detti estremi, ma in tal caso è meglio l' uso della

30. CANNA O PERTICA che è un asta di legno AB (*fig. 5*) per lo più di 10 palmi di lunghezza, questa situata orizzontalmente con un suo estremo al punto A principio della distanza AC di cui si vuole determinare la proiezione orizzontale CD, si lascia che un filo a piombo od un asta verticalmente stabilita passi per l' estremo B e segni il punto *b* sul terreno, che pur talvolta suol determinarsi lasciando cadere liberamente una pietruzza dal detto estremo; a tal punto *b* dovrà porsi un termine della pertica medesima ed operando del pari si verrà a determinare il punto *c*, e così fino al punto C si prosiegue percorrendo la direzione A C. Il numero delle canne A B, E *b* . . . . che risulteranno esprimerà la misura della C D. Si rettificherà tale operazione, ripetendola in sen-

so contrario ed assicurandosi prima di operare, della lunghezza della canna.

31. DEL COMPASSO DI AGRIMENSORE. Sogliono gli agrimensori usare ancora tale strumento di forma consentanea al nome, di legno terminato in punta di ferro a cui danno nel servirsene una volontaria apertura che suol essere di un passo, mediante un' asta di ferro pendente da un punto medio di una gamba e che può con l' altro estremo piegato fissarsi in varii punti dell' altra, secondo le diverse aperture che si desiderano essendo i passi di diverse lunghezze secondo i diversi luoghi. Conosciuta dunque la misura di tale apertura, è chiaro il modo di usare tale strumento poichè la misura di una data distanza sarà designata dal numero di volte che si sarà fatto girare il medesimo. È necessario del pari avvertire che le punte del compasso si trovino sempre nella direzione della distanza a misurarsi, che è difficile ad eseguirsi con tale strumento, non potendosi evitare considerevoli inesattezze nelle misure per la maggiore o minore penetrazione delle punte nel terreno, secondo la diversa consistenza dello stesso. Si potrà in certo modo rettificare la misura e diminuirne le inesattezze, assicurandosi prima di operare, dell' apertura stabilita e ripetendo in senso contrario l' operazione.

32. DELLA ROLLETTA O NASTRO GRADUATO. Un nastro di fiandra dipinto ad olio diviso in palmi e frazioni di questi con la corrispondente numerazione, il quale si avvolge intorno l'asse di una scatola cilindrica di ottone o di cuoio, mediante un esterno manubrietto, forma tale istrumento. Un estremo del nastro è fisso all'asse e l' altro terminato in un anello pel quale traendolo si svolge interamente, o per quella parte che si vuole, terminata l' apertura si avvolge da se nuovamente all' asse rientrando nella scatola mediante una molla.

Si conoscerà sempre tale lunghezza e questa basta paragonarla a quella di cui si vuole conoscere la misura per ottenerne lo scopo, tenendo presente le sopra enunciate avvertenze per l' uso, e la rettifica. Essendo tal nastro flessibile, si possono pure ottenere le misure delle lunghezze in linea curva.

33. DELLA SQUADRA D'AGRIMENSORE. Non tenghiamo al certo parola della squadra da muratore, essendone troppo nota la costruzione e l' uso, intendiamo parlare invece di altro strumento (*fig.* 6) che consiste in un cilindro d' ottone o meglio in un prisma a base ottagona regolare e diviso da quattro fenditure verticali par-

tenti dà quattro estremi di due diametri perpendicolari della base, o meglio da 8 corrispondenti a' punti medii di ciascun lato dell' ottagono. Delle fenditure diametralmente opposte, una dicesi *oculare* e l'altra obbiettiva alquanto più grande, che suole avere verticalmente nel mezzo un sottilissimo filo per bene collimare gli oggetti.

Tale strumento viene poggiato su d'un bastone nella direzione dell' asse e terminato inferiormente da punta di ferro per potersi verticalmente conficcare nel terreno, intorno a questo può girare in senso orizzontale e fermarsi pure mediante una vite di pressione. Le visuali che passano per tali fenditure riescono tra loro perpendicolari nel primo caso, e nel secondo s'inclinano pure a 45 gradi, che però è più vantaggioso. Nel determinare tali angoli consiste lo scopo della squadra.

La verifica da farsi alla stessa consiste nell' assicurarsi se le visuali che dovrebbero riuscire tra loro perpendicolari, lo sieno effettivamente. A tal uopo, piantato verticalmente la squadra e quanto più lontano sia possibile, due mire nella direzione di due fenditure perpendicolari, e facendola girare in modo che la biffa che vedevasi dalla prima si vegga dalla seconda, è chiaro che traguardando per la prima dovrebbesi vedere la mira che nella prima osservazione vedevasi per la seconda, perchè la squadra sia esatta, altrimenti non ammette correzione per adoprarla, e debbe rigettarsi.

L' uso di questo consiste nell' abbassare o innalzare perpendicolari su talune linee del terreno a rilevarsi.

34. DELLA BUSSOLA o meglio *Bussola di declinazione* è un istrumento che offre la misura degli angoli in piani orizzontali. Dessa consiste (*fig. 7*) in un ago magnetico o di declinazione che è sostenuto nel suo mezzo, ove è un cappelletto di agata od altro corpo duro e liscio per facilitarvi i movimenti, sopra una punta che sorge dal centro del fondo, sulla quale si mantiene bilicato, quantunque la punta calamitata sia più leggiera per l'azione magnetica. Nel fondo medesimo ov' è un cerchio inargentato perchè possa meglio distinguersi la graduazione che è di 360°, procedenti da sinistra a dritta. Il piano di tale cerchio è diviso da due diametri tra loro perpendicolari e paralleli ai lati della cassettina esternamente di figura quadrata e che con le loro estremità dinotano i punti cardinali Nord, Sud, Est, Ovest, ove corrispondono rispettivamente le divisioni 0, 180, 90, 270: per evitare gl' irrego-

lari o lenti movimenti dell' ago : per qualsivoglia cagione perturbativa, la scatola è superiormente chiusa con un cristallo : per potersi poi usare separatamente od a rilievo, intorno al punto medio del lato parallelo alla linea Nord-Sud gira in piano normale a quello della bussola un cannocchiale di cui l'asse è del pari parallelo alla linea anzidetta. L' intero strumento è affidato ad un piede che, costruito a ginocchio, gli permette di avere qualunque movimento orizzontale rotatorio. L' ago calamitato ha la proprietà di dirigersi sempre verso i poli del mondo; quell' estremità calamitata dell' ago che dirigesi sempre verso il Nord dicesi *polo Nord dell' ago* , a distinzione dell' altra , che dirigendosi verso il *Sud* , dicesi *polo Sud* ; ovvero, per dare a questi poli nomi opposti a quelli magnetici della terra (poichè i poli dello stesso nome si respingono, e quelli di contrario nome si attraggono), vengono pur detti respettivamente polo australe e polo boreale dell' ago. La direzione dell' ago adunque è quella del meridiano magnetico che è più o meno prossimo al meridiano terrestre. Gli angoli che con tale strumento si misurano, sono detti di declinazione e questa orientale od occidentale, secondo che il polo australe dell' ago si pone verso oriente o verso occidente.

Tale strumento serve per determinare angoli in piano orizzontale , e però sempre così dee situarsi. Se dunque vogliasi l' angolo che tra loro formano le visuali menate a due oggetti da un punto di stazione , si situi ivi l' istrumento e , rivolto il cannocchiale ed uno degli oggetti, si vedrà l'angolo che tal visuale forma con la costante direzione dell'ago, che sarà quello compreso fra lo zero e la punta calamitata bleu dello stesso e dicesi orientazione di quella visuale, similmente traguardando l'altro oggetto ed operando del pari si otterrà l'orientazione della visuale corrispondente. La differenza di tali orientazioni, cioè degli angoli formati nel punto di stazione da ciascuna delle visuali menate a due oggetti, con la costante direzione dell' ago , sarà l' angolo cercato. Appare con facilità che, stando in un punto e determinando varii angoli, come veniam di dire , si potrà subito avere mediante un registro, che potrebbe avere in tal caso la seguente forma , il sito di diversi

Visuali a' punti	Angoli	Osservazioni
A	15°. 30′	. . . . .
B	48°. 22′	limite
C	80°. 30′	pozzo

punti sul terreno cui sono dirette le corrispondenti visuali, solo che si rendano note le distanze di essi dal punto di stazione.

È bene avvertire che, a scanso di equivoco, si suole girare sempre la bussola in senso opposto alla graduazione del lembo e leggere gli angoli, piazzandosi alla punta opposta dell' ago onde non avere una falsa lettura per la piccola distanza del fondo della scatola dall' ago.

Tale strumento è utilissimo per determinare le direzioni o per rilevare gli angoli nelle mine ne' sotterranei, e determinare le lunghezze nelle gallerie sotterranee onde ottenere sul terreno, a cielo scoverto le direzioni delle mine stesse e trovare con approssimazione il punto ove sia più vantaggioso aprire un nuovo pozzo per sventarle che possa metter capo ad un dato filone. È però in tal caso necessario badare a' perturbamenti dell' ago per la prossimità di qualche miniera metallica che però è d' uopo sfuggire.

La bussola infine è essenzialissima per *orientare le piante*, operazione che in seguito esporremo, parlando della plancetta.

È necessario perchè tale strumento prima di servirsene sia corretto 1°. che il perno si trovi esattamente al centro del cerchio graduato 2°. che l' asse ottico del cannocchiale sia parallelo alla linea Nord Sud.

Per conoscere se il perno della bussola si trovi al centro della rosa graduata si potrà misurare un angolo partendo da' diversi punti della graduazione, se questi saranno eguali, la bussola sarà esatta, altrimenti sarà erronea. Si può anche con più precisione conoscere l' errore, se precedentemente siasi misurato il detto angolo con un istrumento esatto p. e. col sestante, col grafometro ec.

Per accertarsi se l' asse ottico sia parallelo alla linea N—S si osserverà la distanza angolare fra due oggetti partendo dal Nord della rosa graduata, indi si misurerà la medesima distanza partendo dal punto Sud; se i due angoli risulteranno uguali l' istrumento sarà esatto. Si può evitare la doppia osservazione se è

ben nota la distanza angolare dei due oggetti, com'è per se chiaro.

35. IL GRAFOMETRO è uno strumento (*fig.8*) composto di un semicerchio di ottone graduato, di due traguardi o meglio cannocchiali, uno dei quali fisso sul diametro del semicerchio in modo che il suo asse si trovi nel piano che passa pe' punti segnati o, e 180 normalmente a quello del semicerchio cui è pure parallelo, e l'altro movibile intorno al centro, potendo percorrere tutto il semicerchio ed anche combaciare col primo, nel qual caso si troverebbe ugualmente condizionato rispetto al piano dello strumento. Una delle estremità di questo cannocchiale è corredata di un

36. NONIO O VERNIER pel quale si ottengono più minute e distinte divisioni di quelle che coi mezzi meccanici non si possono eseguire sugl' istrumenti goniometrici e consiste (*fig. 9*) nell' ingegnosissima applicazione di un pezzo di ottone o d'argento presso le loro graduazioni che, se sono sul lembo di un cerchio dicesi *circolare* e se deve adattarsi su di una riga, dicesi *rettilineo*. Mobile lungo le stesse con le quali però in perpetuo contatto, e mediante una vite di pressione può fermarsi ove si vuole. Tal pezzo, inventato secondo alcuni da Pietro Nonio e secondo altri da Pietro Vernier, che però Nonio o Veoier si addimanda, porta nelle suddivisioni di macchine anche di mediocre grandezza un incredibile precisione. Sia ab la lunghezza del Nonio, divisa p. e. in 4 parti, da sovrapporsi alla porzione $AB = b$ di un circolo graduato divisa in tre parti. Poichè ciascuna di queste risulta $= \frac{a}{3}$ ed ognuna di quelle del nonio $= \frac{a}{4}$, la loro differenza sarà $\frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{a}{12} = \frac{3^\circ}{12} = \frac{1^\circ}{4} = 15'$, onde movendosi tal nonio verso B, finchè le linee C, c saranno per dritto, la *linea di fede* a avrà percorso uno spazio $= 15'$; così quando coincideranno le linee D, d avrà percorso uno spazio $= \frac{2a}{12} = \frac{1^\circ}{2} = 30'$ e così in seguito. Or se a sia un arco di 7° ciascuno de' qnali diviso in 5 parti onde a risulti diviso in 35 parti; se vi si applichi un nonio di egual lunghezza a diviso in però in 36 parti, avremo il passo $= \frac{7^\circ}{35 \times 36} = \frac{7^\circ}{1260} = \frac{25200''}{1260} = 20''$. Suppongasi inoltre che fissata

la divisione dei gradi ciascuno in n parti, si dimandi l' ampiezza p dell'arco del nonio per ottenere x''. Perchè le divisioni dell' arco saranno $= np$, e quelle del nonio $= np \pm 1$; sarà dunque $\frac{p^{\circ}}{np(np \pm 1)} = x'' = \frac{1^{\circ}}{n(np \pm 1)} = \frac{x^{\circ}}{3600}$; e quindi

$n^2 p \pm n = \frac{3600}{x}$. onde sarà finalmente $p = \frac{3600 \mp xn}{xn^2}$

Esempio. Vogliasi $x = 4''$, mentre $n = 12$; sarà $p = \frac{3600 \pm 48}{4 \times 144}$ $=$ (prendendo il segno superiore) $\frac{74}{12} = 74$ divisioni, cioè perchè ogni divisione dell' arco contiene $5' = 6^{\circ}$, $10' = 22200$, ed il nonio dovrà dividersi in 75 parti, d' onde $\frac{22200}{74 \cdot 75} = 4''$ Il segno inferiore $+$ darebbe $\frac{76}{12}$, cioè 76 parti, ovvero 6°, $20'$ ed il nonio dovrebbe averne 75 nel modo stesso. Però l' è più comune far uso del primo segno. Dalla medesima formola si ha pure x, conoscendosi p ed r; cioè $x'' = \frac{3600}{pn'' \pm n}$, preso p in gradi e parti di grado, così posti i dati dell'esempio di sopra si ha $n = 12$, $p = 6 + \frac{2}{12} = \frac{37}{6}$ ed $x = 4$ come si sapeva.

La linea di fede adunque, volendosi stimare le frazioni di qualunque divisione, si fermerà nel sito determinato dall' indice dello strumento e la sua distanza dalla divisione che la precede sul lembo dello stesso verrà indicata da quel numero n che marca la divisione del nonio la quale si trova per dritto con altra dello strumento.

Il piano del Grafometro in parola (*fig. 8*) può avere una qualunque inclinazione sul piede che lo sostiene, non che quella verticale per mezzo di un filo a piombo, che deve toccare il diametro del semicerchio e radere il lembo della graduazione, e l' altra orizzontale, mediante due livelle a bolla d'aria stanti sul piano del semicerchio ad angolo retto tra loro. Per

37. LIVELLA A BOLLA D'ARIA s'intende un tubo di forma cilindrica leggiermente arcuata nella parte superiore poggiando su di un lato, e

ripieno d'acqua, salvo una piccola parte che resta vuota e chiamasi *bolla d' aria*; un tubo di ottone lo investe e protegge, lasciando solamente scoverta una porzione verso la parte convessa onde osservare i movimenti della bolla d' aria che, stando il tubo orizzontalmente disposto, si presenta nel mezzo di esso, per essere la sua gravità specifica minore di quella del liquido. Tal tubo si poggia su di una riga di ottone che può rendersi orizzontale, essendo collegata alle sue estremità mediante due braccia di simile metallo, delle quali una a cerniera e l' altra a vite di richiamo. È necessario però che il piano di tal riga sia parallelo all' asse del tubo. Per assicurarsi di ciò si poggia la livella sul piano di una tavoletta sul quale se ne determina la posizione, segnandovi una linea in lapis lungo un lato della riga, e si riduce la bolla in mezzo muovendo il piano medesimo con 3 viti di richiamo triangolarmente disposte (tal piano potrebbe essere quello della plancetta che in seguito descriveremo) dipoi se rimettendo la livella nella direzione segnata, ma con inversa posizione degli estremi la bolla si allontani dal mezzo, si corrigga l'errore parte con la detta vite di richiamo atta ad avvicinare od allontanare un estremo del tubo dalla riga, e parte con le 3 del detto piano; continuando a praticare ciò fino a che per qualunque posizione si dia alla livella, la bolla d' aria si rimarrà sempre nel mezzo. Parlandosi in seguito della livellazione s' intenderà meglio tale strumento e l' uso estesissimo del medesimo, dirò solo che lo stesso si riserbava per gli usi di poca precisione per la difficoltà di distinguersi il margine della bolla e per non essere troppo libero il moto tra l' acqua e l' aria; ma il Sig. Ab. Fontana lo ha perfezionato, sostituendovi l' aria rarefatta alla comune.

Ritornando al grafometro diciamo finalmente che una bussola sta collegata al semicerchio con la linea Nord-sud parallela al suo diametro. È chiaro che con tale strumento si ottiene un angolo nel piano verticale che formano tra loro le visuali dirette a due oggetti, quello in un piano orizzontale, non che in un qualunque piano in cui trovansi gli oggetti medesimi.

Vogliasi a cagion d' esempio conoscere l' angolo che nel punto di stazione A(*fig. 10*) fanno tra loro le due visuali dirette ai punti B, C, stanti in piano verticale. Si pianti in A l'istrumento in modo che il centro del semicerchio vi corrisponda a piombo e che gli oggetti B, C si trovino nel piano del semicerchio che però co-

me si è detto dovrà verticalmente situarsi. Si traguardi l' uno di essi B pel cannocchiale fisso girando detto piano, senza fargli perdere la prima posizione verticale, e fermandolo con una vite di pressione, per l'alidada o cannocchiale mobile si traguardi l' altro C. Ciò fatto, non resta che leggere sulla graduazione l' angolo formato dalle direzioni de' cannocchiali che sarà appunto l' angolo cercato. Che se si domandi l' angolo che la visuale diretta ad un oggetto fa con l' orizzonte, si disponga prima verticalmente il piano dell'istrumento ed il cannocchiale fisso anche orizzontalmente mediante un'apposita livella, e si dirigga il cannocchiale mobile all' oggetto; è chiaro che l' angolo di elevazione cercato sarà indicato da quello dei cannocchiali.

Si possono dunque, rendendo orizzontale il lembo, ottenere direttamente con tale strumento le proiezioni orizzontali delle visuali dirette a diversi oggetti che non si trovino in detto piano; a tal uopo l'è opportuno che i cannocchiali potessero avere un leggiero movimento nel piano normale a quello del lembo. Finalmente per effetto della bussola si ottengono le orientazioni dei piani, e dessa serve a poter dirigere il cannocchiale fisso su que segnali invisibili dalla stazione, ma di nota orientazione.

Per essere esatto tale strumento è necessario: 1.° che il centro di rotazione debba corrispondere precisamente a quello del semicerchio; 2.° che stando orizzontalmente situato, si trovino in uno stesso piano verticale i due assi ottici de' cannocchiali messi in combaciamento, il centro del semicerchio e la linea 0, 180.

Per potersi accertare della prima condizione, si pianti l' istrumento in un punto, e dirigendo la visuale pel cannocchiale fisso ad un lontano scopo, e traguardandone altro per quello mobile, si osservi l' angolo che fanno tra loro tali visuali, e così si misurino pure gli altri due che ciascuna di queste fa con quella diretta ad un terzo oggetto, compreso o no fra le stesse; nel primo caso la somma di questi due angoli dovrà uguagliare il primo, e questo nel secondo caso pareggiare la differenza degli altri. Ovvero basta in tre punti di stazione misurare gli angoli del triangolo di cui essi ne sarebbero i vertici, e bisognerebbe trovare la loro somma uguale a 180°, altrimenti dovrà correggersi la posizione del centro dello strumento. La seconda correzione ha luogo osservando un punto lontano con ambi i traguardi, e se

le visuali non corrispondano con la linea o, 180°, è necessario muovere convenevolmente i fili de' traguardi o cannocchiali perchè venga tal condizione adempiuta.

35. DEL PANTOMETRO, O GONIOMETRO. È questo (*fig. 11*) un cilindro retto e vuoto di ottone chiuso nelle due basi e diviso in due parti quasi uguali da un piano normale all'asse; esso è sostenuto da un bastone che si pianta verticalmente al suolo, ed è perpendicolare alla base del cilindro nel mezzo della quale si può facilmente fermare: intorno a questo sostegno può avere un movimento rotatorio orizzontale tutto l' istrumento, ed uno simile la sola parte superiore di esso, la quale termina verso la linea di congiunzione con un *nonio* ed agli estremi del diametro che passa pel zero di tal nonio vi corrispondono due fenditure come nella squadra descritta. Nel bordo superiore della parte sottoposta vi è poi segnata una graduazione di 360° ed agli estremi del diametro che passerebbe pel zero di questa, del pari verticalmente, corrispondono due esili fenditure come le precedenti. Per misurare un angolo formato da' visuali dirette a due oggetti dati da un punto di stazione, basta piazzare ivi lo strumento verticalmente, col zero del nonio in corrispondenza di quello della inferiore graduazione che procede da sinistra a dritta, traguardare inoltre per la fenditura inferiore l'oggetto a sinistra, e girando la sola parte superiore, traguardare per la fenditura che vi si trova l'altro a dritta. La misura dell'angolo cercato sarà indicata dallo zero del nonio sulla graduazione sottoposta. Tale istrumento e terminato superiormente da una bussola, qualora debbe servire a rilevare gli oggetti invisibili di cognita orientazione. Mediante una livella a bolla d'aria si mantiene in sito verticale l' asse del cilindro.

La correzione del *pantometro* è la stessa che per la *squadra*, e dovendosi usare con la *bussola* si tenga presente quanto si è detto per tale strumento. Stabilitesi ad angolo retto le direzioni delle visuali, tale strumento può far le veci della *squadra*, della quale è però molto più utile e speditivo.

36. DEL TELEGOMETRO. I diametri apparenti degli oggetti sembrano diminuire in ragione inversa delle distanze, questa verità fisica con la proprietà geometrica de'triangoli simili che hanno proporzionali i lati omologhi, fecero immaginare all' egregio ingegnere topografo Bifezzi un istrumento che con tal nome distinse; e ben

s' intende dalle parole greche di che si compone, *tele*, *lego* e *metron* che senza l'effettiva misura, tale macchina indica le distanze da un punto di stazione ad altri lontani.

Desso si compone principalmente(*fig.12*) di un cannocchiale acromatico avente nel suo fuoco un *micrometro* diviso diametralmente (*fig.13*) da un filo verticale ed orizzontalmente da due altri dei quali il superiore è fisso ed all'inferiore può comunicarsi un movimento nel senso verticale, senza perdere il parallelismo col primo mediante tal vite che nel contempo fa muovere con celerità inversa l'indice di un disco sul *lembo* che sta nello stesso piano del *micrometro* e di cui la triplice concentrica graduazione che vi è segnata dinota le diverse distanze che voglionsi determinare da palmi 25 fino a 1600 secondo le quali e la vista dell' osservatore può allungarsi ed accortarsi il piccolo tubo del cannocchiale nel tubo principale mediante una vicina rosetta.

Il detto cannocchiale è sostenuto da una colonnetta terminata superiormente a ginocchio onde poter imprimere ad esso qualunque movimento verticale, sia capillare, mediante una vite di richiamo, sia molto sensibile mediante l' azione di una molletta.

Tal colonnetta poggia su di una base circolare munita di un nonio, con la quale, e col cannocchiale può muoversi orizzontalmente, facendo strisciare il cerchio in altro concentrico e graduato che serve ad indicare gli angoli in piano orizzontale pel mezzo di una riga fermata alla base anzidetta e di cui il lato passa pel centro della stessa.

Fisse al corpo del cannocchiale sono due braccia di ottone che tengono un arco di cui il centro è il punto di sospensione e di rotazione del cannocchiale che, stando in posizione orizzontale, si trova nella verticale che passa per tal punto una freccia o lineetta segnata nel mezzo di un piccolo archetto fermato alla colonna ed al primo concentrico, e nella verticale medesima i zeri segnati nel mezzo di questo appartenenti alle due graduazioni marcate da una parte, ed a quella segnata nella parte opposta.

Quest' ultima serve per misurare gli angoli verticali o di depressione, e delle prime due l' inferiore indica le differenze fra le distanze oblique e le loro proiezioni orizzontali, e la superiore le differenze di livello fra il punto di stazione e quelli osservati.

*

Finalmente fa parte di tale strumento uno *scopo* o *mira* (*fig. 14*). Questa è un asta che mediante due fascette di ferro ed una vite di pressione sostiene al suo estremo un disco diviso in tre zone di color nero concentriche circolari, di cui la massima è di palmi 4 di diametro, la media di palmo 1 e la minima di mezzo palmo, per le grandi rispettivamente le medie e le minime distanze. Tale asta può piantarsi ne' punti che si traguardano, essendo terminata in tre gambe, ed ivi in posizione verticale mediante un filo a piombo od una livella sferica a bolla d' aria, e dando alla zona massima un doppio raggio può aversi la distanza doppia di quella che dà l' istrumento, bastando solamente raddoppiare il numero delle catene e dei palmi che verranno indicati dall' indice per le svariate distanze.

L' uso di tale strumento è ben chiaro dopo ciò che si è detto, del pari che la sua correzione, essendo un insieme di quelle esposte per la *bussola* e pel *grafometro.*

37. DELLA PLANCETTA. Dicesi pure *tavoletta pretoriana* dal nome dell' inventore. L' è questo un' istrumento di grandissima utilità, mentre nell'atto che si rilevano diversi punti, se ne ottiene la loro proiezione orizzontale sulla carta.

Il pezzo principale di tale strumento (*fig. 15*) è una tavoletta di legname bene stagionato, perchè non risenta le alterazioni pel sole ed umido cui deve andar soggetta, di figura quadrata di lato per lo più palmi due, sulla quale s' incolla il cartoncino da disegno. Questa viene sostenuta da piede (*fig. 16*) costituito da tre gambe di legno con punte metalliche, superiormente fermato ad un pezzo di legno di forma triangolare co' lati concavi intorno al qual pezzo possono giuocare finchè non si fermino con apposite viti di pressione. Dal centro di tal pezzo parte un' asse di ottone cui sta fisso il centro di un cerchio di ottone stabilmente collegato ad una tavoletta di un palmo in quadro su cui vien poggiata quella anzidetta, che dovendo essere perfettamente piana suol chiamarsi *specchio*, e questo può girare orizzontalmente intorno all' asse finchè non si stringa con una chiocciola all' estremo inferiore dello stesso che termina a vite, e può avere un movimento traslatorio mediante due righe scanalate, stanti nella parte sottoposta tra loro parallele, nelle quali si fa scorrere la piccola tavoletta, e tal moto s' impedisce con una vite di pressione. Oltre a tali movimenti, altro capillare ne può ricevere orizzontalmente

mediante una vite di richiamo messa presso il cerchio di ottone, fissa sul pezzo triangolare, e si rende orizzontale il piano dello specchio medesimo con altre tre viti di richiamo negli angoli del pezzo triangolare, che giungono fin sotto la piccola tavoletta la quale è chiaro che può nel bisogno inclinarsi all' orizzonte essendo i tre piedi collegati a cerniera al pezzo triangolare.

Finalmente in un lato dello specchio evvi un incastro di ottone a coda di rondine nel quale può adattarsi una bussola. Tal piede si è sperimentato molto stabile e però trascuriamo di far parola di altre costruzioni antiche meno esatte di quella che abbiamo descritta.

Il piano dello specchio si rende orizzontale mediante una livella a bolla d'aria (§. 34) corretta. Finalmente fa parte di tale strumento una *diottra* la quale serve a traguardare i punti del terreno a rilevarsi, ed è a *traguardi*, da francesi detta *alidade à pinnules*, ovvero a *cannocchiale* che dicono *à lunette*. La

38. DIOTTRA A TRAGUARDI consiste (*fig.* 17) in due piastre di ottone di uguale altezza collegate a cerniera agli estremi di una riga di simil metallo, affinchè nell' usarla si possano fermare perpendicolarmente a questa e, terminato il lavoro, sulla medesima ripiegarsi; in ciascuna delle quali evvi una fenditura esilissima o traguardo ed un apertura rettangolare nella quale due fili in croce l' uno verticale e l' altro orizzontale per modo che tal fenditura e 'l filo verticale che stanno lungo un traguardo ed in un sol piano col lembo della riga (qual piano dicesi di *collimazione*, come il lembo della riga che dicesi *linea di fede*) corrispondono rispettivamente al filo verticale ed alla fenditura praticata nell' altro traguardo. Per verificare se la *linea di fede*, la fenditura ed i fili verticali si trovino in uno stesso piano di collimazione, si poggi tal diottra sullo specchio orizzontalmente situata e si traguardi un lontano scopo, indi segnata in lapis lungo la linea di fede la proiezione della visuale, si rivolti l' istrumento e, situatolo in modo che la linea di fede combaci con quella in lapis, si traguardi per l'altra estremità l'oggetto medesimo che dovrà trovarsi esattamente sul filo verticale se sia esatta la diottra, altrimenti si trasporti il filo ora a dritta ed ora a sinistra, mediante un' apposita vite, finchè alternando sempre la posizione della diottra si vegga costantemente cadere l' oggetto sul filo verticale. Tale istrumento è però meno esatto ed utile della

39. DIOTTRA A CANNOCCHIALE. Un cannocchiale (*fig. 18*) che ha due fili in croce messi nel comun fuoco di due lenti l'oculare e l'obbiettiva. Vien sostenuto da una colonna la quale è collegata al piede ad una riga di ottone in modo che la linea di fede di questa è nello stesso piano verticale con l'asse del cannocchiale il quale può girare in senso orizzontale per 180 gradi onde invertire il sito dell'obbiettiva in quello dell'oculare e traguardare in opposta direzione senza cambiare la posizione della riga e può avere un movimento nel senso verticale, qual movimento puol essere indicato per gradi e minuti, mediante un indice fisso normalmente al cannocchiale nel suddetto punto di rotazione il quale percorre la graduazione segnata in un arco di cerchio di ottone fermato alla colonna che ha per centro il punto anzidetto di rotazione ed il zero nella corrispondenza dell'asse della colonna medesima.

Si corregge relativamente al punto di veduta dell' osservatore nel traguardare un oggetto allungando o rientrando il tubo oculare. Per rendere più o meno distinti i fili in croce si possono questi approssimare mediante una vite all'oculare od all'obbiettiva.

Per assicurarsi se il filo verticale sia esattamente tale, basta operare come si è detto per la diottra a traguardi, avvertendo che se non si rinvenga verticale vi si può ridurre facendo girare concentricamente il tubo oculare. Finalmente per accertarsi se l'asse del cannocchiale si trovi nello stesso piano verticale col lembo della riga, si pratichi lo stesso mezzo e, trovandosi che il filo verticale non corrisponda con l'oggetto traguardato, si correggerà tale errore portando a dritta od a sinistra tal filo mediante due apposite viti presso l' oculare fino a che si vegga corrispondere allo scopo prefisso. La riga suol farsi flessibile di ottone per adattarsi più facilmente sulla tavoletta.

Descritta così completamente la plancetta non che tutte le parti che la compongono, stimo prima di parlare del modo di adoperarla, spiegare il significato di alcune espressioni abbreviative usate da topografi per l' uso dello strumento medesimo.

40. *Livellare la tavoletta* ovvero *orizzontarla* è lo stesso che ridurre il piano superiore dello specchio in posizione orizzontale. Si ottiene ciò correggendo la livella che venghiamo di descrivere applicandola sullo specchio in diverse posizioni e movendo i piedi dello strumento e poi le tre viti al di sotto dello specchio finchè a bolla d' aria si rimanga sempre nel mezzo.

41. *Orientare la tavoletta* vuol dire girare lo specchio finchè l'ago magnetico segni con precisione il grado col quale si travaglia, o quello della vera declinazione magnetica del luogo, o che è lo stesso, finchè la plancetta si trovi relativamente ai diversi oggetti del terreno nella stessa posizione in cui stava nella precedente stazione; che però senza usare la bussola si ottiene tale scopo *operando col punto in dietro* come in seguito si vedrà più chiaramente.

42. *Fermare la tavoletta*, vuol dire stringere una vite del gambo, orientata ed orizzontata che sia.

43. *Posizione di tavoletta* ovvero *stazione* è il sito ove si dispone l' istrumento per operare. Le stazioni si distinguono in *primarie* e *secondarie* secondo che fissano i punti principali, o secondarii.

44. *Mettere la tavoletta in istazione*; così s' intende fare che il punto di stazione del terreno corrisponda nella stessa verticale con la sua posizione scelta o risultata sulla carta, ciò si ottiene prima ad occhio nel piazzare lo strumento, e poi con un filo a piombo sospeso con un compasso a punte ricurve, o per minore incomodo ad occhio con mano al di sotto dello specchio ed in corrispondenza del punto sullo stesso segnato, movendo le gambe del piede ed imprimendo alla tavoletta un movimento di traslazione se occorra, stando ora da un lato ed ora dal contiguo, finchè alternando di posizione si giungerà ad ottenere l'appiombo richiesto.

45. *Traguardare* è l'osservare alcun oggetto a traverso della diottra.

46. *Visuale*. Traguardato un oggetto qualunque, dicesi *visuale* la linea in lapis condotta lungo il lembo della riga ad indicare la direzione dell' oggetto medesimo rispetto al punto di stazione.

47. *Raggio* è la lunghezza proporzionata in parti di una scala alla misura da eseguirsi e segnata sulla visuale corrispondente dal punto che indica la proiezione di quello di stazione; mentre così l' altro estremo di tal tratto o di tal raggio dinota la proiezione di quello traguardato sul terreno.

48. *Segnali*. Son questi oggetti ben distinti in qualche loro punto. Altri sono stabili e diconsi *punti fissi*, come una casa un albero ec. ed altri amovibili che sono le *paline*, *biffe* ec. altra volta descritte.

49. *Intersecare* vuol dire fissar punti con l' intersezione di due visuali.

50. *Deviazione*: così si chiama la declinazione di un raggio, od altro lavoro dalla vera stazione.

51. *Battute* sono le perpendicolari che s'innalzano dalle misure per rilevare punti, andamenti ec.

52. *Attaccarsi* è il partire in una stazione con la misura da un punto determinato, per fissare quello rappresentato in tavoletta.

Veniamo ora al

53. *Modo di adoperar la plancetta*. L'operatore, provveduto di buoni strumenti e diligenti giornalieri munitosi di aghi da cucire con testa di cera lacca ed avendo stirato sullo specchio il cartoncino, si segni su di esso una scala (§. 20) e supponiamo dapprima che debba *determinare in tavoletta* due punti A, B, cioè che debba rilevare gli stessi (*fig. 19*) Ciò può farsi in varii modi che in seguito completamente esporremo; ma ora non intendiamo che dir quanto basti per indicare solamente l'uso dello strumento. Si segni sul foglio un punto *a* che indichi quello sul terreno ove si metta in istazione la tavoletta cioè il punto A uno dei dati. Si orizzonti e si segni su di esso la linea del vero meridiano magnetico che è la parallela alla direzione dell'ago nella bussola che sta attaccata alla plancetta col lato parallelo alla direzione nord-sud della stessa; ovvero si segni la linea che s'inclina a tal lato con l'angolo che questo o la direzione nord-sud della bussola forma con quella dell'ago calamitato. Si pianti una palina verticalmente al punto B ed un'ago nel punto segnato sulla tavoletta ad essa normale. Intorno a tal ago si faccia girare il lembo della riga della diottre finchè si possa per essa traguardare detta palina, allora misurata la distanza dei punti *A*, *B*, in parti della scala, riportata sulla visuale segnata lungo il lembo della riga, mediante un compasso, a partire dall'ago tale misura, l'estremo *b* di questa sarà la proiezione del secondo punto B. Se oltre a questi due punti se ne debba determinare un terzo C si sarebbe a questo rivolta la diottra, facendola girare intorno all'ago medesimo senza muovere l'istrumento, misurando la distanza tra punti A, C e riportando del pari col compasso, mediante la scala medesima tale misura sulla seconda visuale, l'estremo di questa *c* sarebbe la proiezione del terzo punto C. Ovvero facendo stazione nel secondo punto B partendo dal primo A ove si pianti una palina, e qui è d'avvertirsi che mai deve togliersi la tavoletta dalla stazione, se prima non siasi

piantato un picchetto nel puoto corrispondente a quello sulla tavoletta che indica il punto di stazione, si giri la tavoletta fioo a che per la diottra situata col lembo della sua riga in collimazione con la prima visuale si possa traguardare la palina rimasta nella prima stazione sarà così orientata la plancetta e tal modo di operare dicesi *col punto indietro* e la direzione dell' ago nella bussola si troverà essere parallela alla linea meridiana segnata sulla carta quando si stava nella prima stazione.

Orizzontato allora lo specchio e piantato un ago nel punto *b* su di esso corrispondente alla proiezioοe dell' altro B si faccia girare il lembo della diottra intorno ad esso finchè si possa per la stessa traguardare il terzo punto C, ove siesi messa una biffa o dove sia un segnale naturale; si misurerà allora la distanza di questo da quello di stazione e si riporti sulla visuale corrispondente a partire dall' ago, in parti della scala medesima adottata, si otterrà così, come nel primo caso, sulla tavoletta la proiezione di tal terzo punto.

Segnando i due raggi sulla tavoletta ne' casi anzidetti, questi rappresenterebbero le proiezioni orizzontali delle corrispondenti linee sul terreno, e l' angolo risultante sulla tavoletta, sarebbe il rilievo delle proiezioni orizzontali di quelli che formavano sul terreno le linee corrispoodenti.

Tanto è sufficieote per formarsi una idea dell' uso di tale strumento; il quale è di un utile singolare come si vedrà in seguito.

54. DELLA PLANCETTA A STADIA. Tale istrumeoto è l' insieme della plancetta già descritta e della *stadia* ovvero *diottra a stadia*.

È noto che per la similitudine dei triangoli sotto un angolo costante le altezze degli oggetti in questo compresi sooo proporzionali alle loro distanze del vertice. Ed un ingegnere italiano, applicando tal principio alla costruzione di un cannocchiale che dia uo angolo costante, fra i lati del quale sia compreso un oggetto di nota altezza, divisa in parti proporzionali a quelle di una conosciuta distanza io cui si trovi dal vertice dell' angolo stesso, inventò la *stadia*. Con essa si ottengono le misure delle distanze con sollecitudine ed esattezza sufficiente nei rilievi ad una scala anche maggiore del diecimillesimo, perchè coo la stessa si giunge a rilevare la distanza di un oggetto dal punto di stazione, conoscendo l' ampiezza dell' angolo formato dalle visuali che ne comprendono l' altezza oota.

Tale strumento si compone adunque (*fig.* 20) di un cannocchiale che ne forma il pezzo principale, desso ha al suo fuoco F un telarino con due fili orizzontali *a*, *b* micrometrici, equidistanti da un' altro che passa anche orizzontalmente dal centro; ed intersegati da un altro che passa pel centro medesimo verticalmente; è chiaro che le visuali che passano pe' punti, d' intersezione di quest' ultimo co' primi due orizzontali debbano formare all' obbiettiva un angolo costante *a* O *b* uguale al suo verticale A O B formato dal prolungamento delle visuali stesse. Essendo F G la direzione dell' asse del cannocchiale, intercettando tali visuali con un' asta A B perpendicolare a tale direzione dovrà stare

$$OG : AB :: OF : ab$$

che però dividendo la A B in un numero di parti uguali, pari a quello delle altre che si contengono nella O G, è chiaro che passando in *c d*, le visuali stesse ne intercetteranno un minor numero ed uguale a quello delle altre che si contengono nella O *g*; essendo l' angolo A O B costante; ond' è chiaro che, stabilito una certa divisione di parti uguali di un asta che chiamasi *mira a stadia* e portandola ad una distanza O G sul terreno quanto più sia possibile orizzontale e che abbia un numero di parti uguali a quello nel quale è divisa la mira, si potrà, piazzato che sia il cannocchiale con l' obbiettiva in O, avvicinare per modo tra loro i fili che formino l' angolo visuale A O B tale che le O A, O B passino per gli estremi della A B situata normalmente al terreno. Poichè inoltre i due fili micrometrici sono equidistanti da quello che passa pel centro, ovvero essendo l' angolo A O B diviso per metà dalla direzione dell'asse, è chiaro che, usando uno di essi con quello intermedio, le divisioni dalla mira acquisterebbero un valor doppio per modo che se prima potevansi misurare 1000 palmi di distanza se ne potrebbero invece misurare 2000. Così si è fatto dipendere dalla divisione della mira l' angolo visuale del cannocchiale; ma è ben chiaro ora il modo d' ottenersi tale divisione, stabilito al contrario tale angolo, operando cioè in senso inverso.

In ogni modo dalla proporzione di sopra indicata si rileva che essendo le parti della mira dipendenti dal rapporto della distanza *a b* alla lunghezza OF, è chiaro che se stia OF : *a b*::50 : 1, e sia inoltre O G=palmi 1000, sostituendo tali valori nella detta

proporzione si avrà A B=20 palmi, cioè che l'angolo visuale risultante abbraccerebbe a tal distanza una mira di palmi 20, e però 100 palmi sarebbero su di essa rappresentati da 0,20 di palmo. Tal mira suol essere di abete da potersi piegare in due pezzi per facilitarne il trasporto; suol essere di largh. 0,5 di palmo e di lunghezza palmi 16 de'quali 15 comprendono la graduazione, e l'angolo ottico del cannocchiale suole avere tale ampiezza, da comprendere questi 15 palmi alla distanza di altri 750, sicchè un palmo della mira rappresenta 50 palmi.

La posizione de'fili si verifica avvicinando la mira alla metà della distanza ove l'angolo delle visuali dovrebbe abbracciare la metà di 16 palmi trovandosi corrispondere il filo intermedio al punto di mezzo della mira.

I due fili micrometrici dunque sono destinati per la misura delle distanze orizzontali: di quelli che passano pel centro, il verticale serve per gli angoli azimutali degli oggetti che si osservano e l'altro orizzontale per gli angoli di depressione onde calcolare le differenze di livello.

Oltre degl'indicati fili evvi un secondo telarino di due altri micrometrici paralleli ai primi ma distanti tra loro per la quarta parte della distanza di quelli, che mediante una vite si rendono visibili e si possono invece mediante il girare di un'anello mettere a vista quelli del secondo telarino, che porta al fuoco dell'obbiettiva, rendendo i primi nel contempo invisibili. Con questo secondo nuovo telarino è chiaro, dopo ciò si è detto, che usando i fili di questo si osserva una distanza quadrupla con la stessa lunghezza della mira usata col primo telarino, o la stessa distanza con una mira che sia in altezza la quarta parte della prima; e del pari usando il filo intermedio con uno dei due micrometrici del secondo telarino, si potrà determinare con la stessa mira una distanza doppia di quest'ultima, ovvero ottupla della prima, o con una mira che sia l'ottava parte della prima aversi la stessa prima distanza osservata co'due fili micrometrici del primo telarino.

Ma poichè dovendosi adattare il cannocchiale alla vista dell'osservatore, ed intanto col muovere l'oculare si verrebbe a far variare l'angolo che dev'essere costante, si è dal distinto Piemontese signor Porro ufficiale superiore, aggiunta una terza lente, con la quale trasportando solo il tubo oculare si ottiene lo scopo, e tal cannocchiale così modificato lo ha con ragione chiamato *anallattico*. e dà un ingrandimento di 20 volte.

Poichè il cannocchiale rovescia l' immagine degli oggetti, la numerazione della mira progredisce dal basso all'alto ed i numeri della graduazione sono capovolti.

Descritto il cannocchiale e la mira, la quale per mezzo di un filo a piombo si fa sempre verticalmente piantare nel terreno, veniamo al mezzo di sostegno del cannocchiale.

Questo è sostenuto ad una colonna per un' asse orizzontale intorno al quale però può muoversi in senso verticale mediante una vite di richiamo e fermansi col mezzo di altra di pressione. Un cerchio graduato che da fino ai minuti primi e che sta situato verticalmente ad un estremo di detto asse di rotazione che passa pel centro di esso. Tal cerchio è munito di un nonio che può lambirne il lembo ed i suoi movimenti dipendono da quello del cannocchiale cui è fermato. La lettura della graduazione si rende facile per un microscopio.

Finalmente la colonna è fermata sulla riga che ha il taglio sullo stesso piano verticale che passa per l' asse ottico, e suol di più dessa farsi flessibile perchè possa facilmente combaciare sulla plancetta, ancorchè non fosse uniformemente piana, ed in ultimo perchè la colonna sia verticale, sono sull' asse, che è a questo normale due livelle a bolla d' aria ad angolo retto tra loro.

Il modo di usare la *plancetta a stadia* è troppo semplice dopo l' esposto; mentre situata come si è detto la mira sempre normalmente al terreno nel punto a traguardarsi come l'estremo della distanza a determinarsi, basta osservare col cannocchiale, ed il numero delle parti che comprende l'angolo delle visuali, farà intendere qual sia la distanza richiesta. Ciò però avrebbe luogo senza errore sensibile sempre che trattisi di determinare una distanza in piano orizzontale; ma se la stessa trovisi in un piano inclinato sarebbe erronea la misura, sì perchè l' asse del cannocchiale non incontrerebbe normalmente la mira, e sì ancora perchè abbiamo bisogno non di tale distanza, ma della sua orizzontal proiezione.

Ad ottenere tal duplice correzione si espone quanto segue:

Sia Ob (*fig.* 21) una distanza misurata che fa con l'orizzontale OR l'angolo $\alpha = bac$ che la direzione della mira fa con la ac perpendicolare alla direzione di Ob, ed il triangolo abc da

$$ab : ac :: \text{sen. } c : \text{sen. } b.$$

e poichè $b = 180 - a - c = 180 - \alpha - c = 180 - (\alpha + c)$ sarà $\text{sen. } b = \text{sen. } (180 - (\alpha + c)) = \text{sen. } (\alpha + c)$; o sia

$ab : ac :: \text{sen. } c : \text{sen. } (\alpha + c)$ ed

$$ac = ab \frac{\text{sen } (\alpha + c)}{\text{sen. } c} = ab \frac{\text{sen. } \alpha \text{ cos. } c + \text{sen. } c \text{ cos. } \alpha}{\text{sen. } c},$$

d' onde $ac = ab$ (sen. α cot. c + cos. α).

Poichè intanto α è sempre molto piccolo lo è pure il suo seno e poichè l'angolo c è quasi retto, cot. c è piccolissima, perciò trascurando i termini affetti da detta quantità nell' equazione di sopra, questa si riduce all' altra $ac = ab$ cos. α, e

$$\text{cos. } \alpha = \frac{ac}{ab}$$

Chiamando ora l il risultamento della lettura e d la distanza Ob si ha

$$l : d :: ab : ac \text{, donde}$$

$d = l \frac{ac}{ab}$ dove, sostituendo per $\frac{ac}{bd}$ il suo valore di sopra ottenuto, si ha

$$d = l \text{ cos. } \alpha.$$

Poichè inoltre nel triangolo ObD il lato OD è proiezione orizzontale di Ob ovvero di d si ha

$OD = Ob$ cos. $bOD = d$ cos. α; ma $d = l$ cos. α, dunque la distanza doppiamente corretta si ottiene nella seguente equazione

$$CD = l \text{ cos.}^2 \alpha.$$

Dalla quale equazione si scorge che conosciuto l' angolo di pendio α della distanza l determinata si può immediatamente calcolare la proiezione orizzontale OD di quest' ultima corretta dell'errore di perpendicolarita fra la mira e 'l raggio visuale.

Ma sarebbe questa operazione che non renderebbe spedita l'operazione, dovendosi ripetere ad ogni distanza inclinata che bisognerebbe determinare, e però mediante questa equazione si può calcolare una tavola di riduzione fra gli elementi α ed l che riesce di grande utilità in campagna. Questa tavola si calcola per un certo raggio medio p. e. di palmi 400 ridotto all' orizzonte e corretto dell' anzidetto difetto di perpendicolarità, d' onde con calcolo semplicissimo possono ricavarsi i valori corrispondenti a lunghezza più o meno grandi di 400 palmi.

Detta tavola insieme con altra che riguarda i valori delle tangenti e sono per calcolare per interpolazione e speditamente la differenza di livello tra due punti la cui distanza si ottiene con me-

todi grafici e l'inclinazione della linea che li congiunge si ottiene per mezzo del cerchio graduato unito alla stadia o per mezzo dell' *ecclimetro* che in seguito descriveremo si trovano presso il Real Officio Topografico di Napoli.

La diottra a stadia si adopera adunque sulla plancetta semplice. Con essa si ottengooo comodissimamente i rilievi di strade e sentieri tortuosi e quelli delle estensioni di terreno molto irregolari nella superficie di cui bisognano però molte misure di distanze per ottenerne l' esatta configurazione, quantunque de' precipizii, delle paludi, luoghi frastagliati, scoscesi ed impraticabili ne formassero la superficie.

Con la stessa si evitano le difficoltà della catena. Si ottiene somma celerità nell' operare, mentre basta traguardare un punto per conoscerne la distanza da quello di stazione. Il risparmio delle persone aiutanti, la certezza di non commettere equivoci, sia nell' osare la catena, sia nel computarne le portate, l' ottenersi la proiezione orizzontale delle distanze senza la pena di tenere orizzontalmente distesa la catena; son questi i vantaggi pure che offre tale strumento.

Non terremo adunque parola del *corismometro* mentre con tale strumento si ottiene lo stesso scopo della *stadia* con molta però minore esattezza, e la di cui costruzione è diversa da quella della stadia sol perchè in questa la mira ha le sue divisioni uguali dal numero delle quali, comprese dai fili del telarino inomobile, si deducono le diverse distaoze, e nel corismometro in vece l' altezza della mira è costante ed è variabile l' angolo ottico cioè al fuoco dell' obbiettiva evvi uo vetro con alcune divisioni o fili, e dal numero di questi fili, abbracciati dall' iotera altezza della mira, si deducooo le distanze medesime.

55. DEL SESTANTE. Sulla proprietà catottrica della luce; cioè che l'angolo d' incidenza è eguale a quello di riflessiooe, fu fondata l' invenzione del sestante noo che di tutti gli altri strumeoti a riflessione: d'esso è on'arco di eerchio (*fig.* 22) di 60 gradi di ottone di cui se il raggio oltrepassi i 6 pollici suol costruirsi di legno perchè divenga più maneggiabile; ma per la proprietà di tale strumento che gli archi di 30′ contaoo per un grado intero, può servire per la misura degli angoli non maggiori di 120°. Se ne faono di piccolo raggio fino a pollici $2\frac{1}{2}$ per renderli tascabili. Tal'arco può essere di 80 gradi ed allora l' istrumento chiamasi *ottante*.

Una riga mobile CD intorno al suo centro C presso del quale normalmente e nella stessa sua direzione sta su di essa fermato uno specchio EF. Quando tal riga trovasi in modo che i zeri del nonio e del lembo coincidano, desso risulta parallelo ad altro più piccolo HL solo per la metà inferiore amalgamato che sta ove si osserva nella figura fisso è perpendicolare al piano di detto arco. Tale alidada è terminata in un vernier che dà i minuti, e di cui la divisione si viene ad ingrandire avvicinandosi il microscopio G mobile in modo al centro sul braccio dell' alidada, che può alquanto pure allontanarsi od avvicinarsi fino a che, secondo la vista dell' osservatore sia stabilita la lente alla sua distanza focale. Un collare M che parte da un punto del raggio il quale passa per lo zero del lembo, tien fermo un cannocchiale che avendo due lenti convesse col fuoco medesimo, rovesciano le immagini degli oggetti ed a tal fuoco evvi un telarino con due fili paralleli che rinchiudono il campo nel quale debbonsi osservare gli oggetti. Può tirarsi il tubo dell' oculare secondo la distanza de' medesimi e la vista dell' osservatore. Di detto cannocchiale la posizione è tale che il suo asse è parallelo al piano dell'arco, ma non perpendicolare a quello dello specchio, e per la parte non amalgamata di questo cui è diretto può per esso traguardarsi uno degli oggetti. De'vetri colorati O, P, servono per portarsi nel bisogno innanzi gli specchi ad impedire il cattivo effetto de' raggi solari nell' occhio dell' osservatore. Tale strumento che si mantiene per una manica N che sta al di sotto serve per determinare l'angolo che in un punto di stazione formano le visuali dirette a due oggetti.

In primo luogo se l' angolo formato da due oggetti sia zero cioè che in un oggetto entrambi si possano considerare mentre un secondo stia nella stessa direzione della visuale al primo diretta, allora traguardando pel cannocchiale tale oggetto si vedrà desso direttamente per la parte non amalgamata dallo specchio di contro ed in riflessione nella parte sottoposta amalgamata del medesimo, supposto che lo zero del nonio coincida con quello del lembo, cioè che i due specchi sieno paralleli. Ciò è chiaro mentre i raggi che emanano dall'oggetto e cadono sullo specchio possono supporsi paralleli alla direzione OF (*fig.* 23) atteso la picciolezza della porzione MN rispetto alla distanza dell' oggetto dal punto

di stazione e però l' angolo MNF è uguale ad OMN. Ma essendo l' angolo d' incidenza uguale a quello di riflessione, sarà per lo specchio M, SMO = NMF e per l' altro N sarà GNM = HNF e pel parallelismo de' due specchi essendo GNM=NMF sarà pure SMO=HNF, e quindi OMN=MNF vale a dire che il raggio riflesso NF è parallelo ad NO e quindi nella stessa direzione di OF. Ciò posto sieno O, O′ due oggetti, si facciano ad occhio corrispondere gli oggetti nel piano del lembo, si traguardi del pari il primo O col cannocchiale, e poichè il raggio incidente sullo specchio M che parte da O′ riflettendosi da questo, non incontra l'altro specchio N e non può giungere però all' occhio dell' osservatore; è necessario far girare in modo la riga, tenendo fermo l' istrumento che lo specchio M rifletta tal raggio sull'altro N, e questo all'occhio dell'osservatore il quale vedrà come nel 1.° caso nella verticale medesima i due oggetti O, O′. Allora con una vite di pressione all' estremo D dell' alidada medesima si fermerà la riga e mediante l' altra vite Q di richiamo che serve ai piccoli movimenti, si osserverà con un microscopio lo spazio percorso dal nonio sul lembo ovvero l'angolo AMB, mentre il doppio di tal angolo dinoterà quello cercato ovvero l'angolo OMO′.

Infatti essendo OMO′=O′MC—OMC, ed è OMC=180—2AMC =180—2CMB — 2AMB, ed O′MC=180 — 2CMB, sostituendo questi due ultimi valori nella prima equazione ed effettuando le operazioni si ha OMO′=2AMB, e sarà OMO′=AMB per taluni di questi strumenti ne' quali la graduazione è stata eseguita in modo, che ogni semigrado corrisponde ad un grado si evita di raddoppiare gli archi osservati.

Si maneggia più facilmente facendo coincidere il zero del lembo con quello dello strumento osservando prima quello a dritta O′ che si vedrà raddoppiato, e senza sperdere l' imagine riflessa si muova la riga e contemporaneamente si guardino per la parte non amalgamata gli oggetti che sono alla sua sinistra, si vedrà muovere anche da dritta a sinistra l' immagine riflessa finchè non veggasi questa soprapporsi all' oggetto O ed allora si fermerà la vite e si leggerà come si è detto poc' anzi sul lembo l' angolo cercato.

Si corregge tale strumento verificando

1.° Se, essendo gli specchi paralleli, il zero del lembo coincida con quello del nonio.

2.° Se l' asse ottico del cannocchiale sia parallelo al piano dell' arco.

3.° Se i piani degli specchi sieno normali a quello del lembo.

Si verifica se ha luogo la prima condizione, ovvero si corregge l' errore che dicesi di *collimazione* con molta facilità, mentre, avendo dimostrato che, traguardando un oggetto col cannocchiale, se i due zeri coincidevano e gli specchi supponevansi paralleli, la immagine diretta doveva combaciare con la riflessa, è chiaro che, traguardando del pari un oggetto e non trovandosi la coincidenza delle sue immagini, gli specchi non saranno paralleli, e vi si dovranno ridurre mediante una vite di richiamo che farà rotare dolcemente lo specchio, pel quale si è traguardato, intorno un asse verticale.

Per assicurarsi della seconda condizione si fa uso di un cannocchiale, detto di prova, il quale si situa sul piano del lembo per mezzo di due appoggi quadrangolari, accosto a quello dello strumento. Si osservi se, traguardando per esso un lontano scopo, questo si apparta dall' intersezione dei fili, girando intorno a se stesso il cannocchiale e riconoscendo la mancanza della chiesta condizione, nel cannocchiale fisso vi si procuri del pari muovendo la retina dei fili.

Finalmente si verifica se i piani degli specchi sieno perpendicolari a quello dell' arco, situandosi in modo da vedere nello specchio una parte del lembo. Se l' immagine riflessa comparisca non formar che una superficie sola con quella che direttamente si vedrà a lato dello specchio medesimo, la perpendicolarità avrà luogo. Se al contrario l' immagine riflessa del lembo sembrerà distaccata dalla parte direttamente veduta, lo specchio sarà inclinato al lembo, ed allora bisognerà addrizzarlo per mezzo delle viti che l' attaccano all' alidada fino a che avrà acquistata la cercata posizione.

56. SESTANTE AD UN SOLO SPECCHIO. Tale strumento, immaginato dal Capitano francese Hanus, ha la proprietà di far vedere più chiara l' immagine riflessa, la quale soffre una sola riflessione non due, come nel precedente strumento avveniva, per lo che molto indistinta si ravvisava l'immagine medesima. Una riga di ottone (*fig.* 24) tiene ad un estremo un piccolo foro ed all' altro uno specchio ad essa

normalmente situato, solo per metà amalgamato il quale può mediante apposite viti ricevere un movimento nel senso orizzontale, girando intorno un asse verticale. I movimenti di esso sono indicati da un arco di ottone, sesta parte di circonferenza, che sta fermo allo specchio in modo che, quando questo è perpendicolare alla direzione della riga, il zero della sua graduazione coincide col punto medio della larghezza della riga sudetta, determinato da un indice.

Sieno A, B, i due oggetti de' quali vogliasi la misura angolare al punto di stazione C; situato l'istromento in modo che, traguardando un de' punti A pel foro O e per la parte non amalgamata *m'* C dello specchio *mm'*, senza perdere tale immagine diretta, si faccia girare lo specchio finchè l'altro oggetto B, riflettendo sullo stesso, giunga all'occhio dell'osservatore il quale vedrà combaciare le due immagini; è chiaro che per verificarsi ciò, lo specchio debba trovarsi in tal posizione NN' che BCN = OCN' ovvero ACN = NCB, cioè che l'angolo ACB dei raggi AC, CB nel punto C resti diviso per metà dalla sua direzione; mentre allora sarà BCN=OCN'=NCA, d'onde si rileva che NCM, cioè l'angolo che formano tra loro le due posizioni dello specchio, uguaglia il supplemento della metà dell'angolo ACB; che si cerca, o che è lo stesso 2NCM= al supplemento dell'angolo ACB. Che però ad evitare equivoci è utile sulla graduazione dell'arco, anzichè scrivervi 0, 10, 20 ec. segnarvi invece gli angoli complementali rispettivi 180, 170. . . , ed allora l'angolo cercato ACB sarà indicato direttamente dall'altro che si legge sulla graduazione.

Descritti questi due strumenti a riflessione mi veggo esentato di tener parola di altro strumento di tal natura come del *cerchio a riflessione*, mentre questo, oltre a non essere di stretto bisogno per le operazioni topografiche, non differisce dal sestante che per la estensione della graduazione che è segnata su di un intera circonferenza in 720 parti uguali che rappresentano gradi, anzichè nella metà 360, per la stessa ragione addotta di sopra parlando del sestante, per la qual cosa si ha il vantaggio di ripetere gli angoli osservati ed ottenersi più esatto risultamento, prendendo la media aritmetica di diverse osservazioni di un angolo medesimo.

Questi strumenti a riflessione non richiedono che un appoggio a mano; ma non danno mai molta precisione, come pure non

possono con essi ottenersi angoli molto acuti, atteso la doppiezza del cristallo dello specchio e quella della sua cornicetta; ad ovviare un tale ostacolo si suole però, anzichè misurare direttamente l' angolo cercato, misurare quelli fra i due oggetti ed un terzo convenevolmente prescelto. Così pure non parlerò del *sestante grafico*, interessando piuttosto la parte disegnativa della topografia, che la scientifica di che ci stiamo occupando, e finalmente tralasciamo di far parola di altri strumenti a riflessione, come della *squadra a riflessione*, della *bussola a riflessione* ec.; mentre questi sono particolarmente destinati per osservazioni nautiche od astronomiche, essendo un de' loro principali vantaggi quello di non essere necessario il fissarli per operare, ed abbiamo solamente voluto parlare del sestante come quello tra questa specie di strumenti, di cui gli ufficiali dello Stato Maggiore deggiono frequentemente far uso per fare delle rapide riconoscenze.

PARTE SECONDA

Della Planimetria.

SEZIONE I.

Della determinazione delle diverse distanze.

ARTICOLO I.

DELLA DETERMINAZIONE DELLE DISTANZE ACCESSIBILI E DEGLI ALLINEAMENTI.

57. Già si è detto nella prima parte a' numeri 29, 30, 31 e 32 come possa eseguirsi la misura di una distanza sul terreno, anche quando non si possa far uso della stadia, del telegometro od altro simile strumento, presentando il terreno medesimo degli avvallamenti o prominenze; ma poichè potrebbe nascer dubbio nel modo di proseguire sulla direzione della linea di cui si cerchi la misura, stimiamo invece tener parola

58. Per *allineamento retto* od *allineamento* semplicemente detto s'intende la traccia che segnerebbe sul terreno l'intersezione del piano verticale che, passi per due punti dati; e *segnare* un tale allineamento, vuol dire segnare sul terreno tal traccia, e questa si esegue conficcando nello stesso a varie distanze dei picchetti, per modo che l'osservatore, piazzato dietro il primo nella direzione dell' altro confitto nel secondo punto dato, vegga gli altri che farà situare tutti nella stessa retta in direzione di questi.

59. Per *allineamento curvo* s' intende la traccia che risulterebbe, segnata da' picchetti sul terreno, dall' incontro delle verticali che passerebbero pe' diversi punti di una curva di cui alcuni sieno segnati sul terreno. Tali allineamenti possono aver luogo nel segnare lo sviluppo di una risvolta di un asse stradale.

60. Allorchè gli estremi A,B (*fig.* 25) dell'allineamento non sono visibili tra loro, e debbasi operare senza strumenti, si segni un' allineamento AC comunque al primo inclinato dal punto A; dall' estremo C del quale sia visibile il punto B, si segni del pari l' allineamento BC che si misuri come il primo AC, e scelte due distanze CD, CE, che fra loro si serbino rispettivamente lo stesso rapporto delle CA, CB, si misuri la DE e, presi due cordini uno uguale a CE; l' altro uguale a DE, si fermi il primo con una delle estremità al punto *d* sull' allineamento AC, facendo *Ad*=DC e l'altro con una delle estremità in A; il punto *c* in cui questi, tenendoli tesi s' incontrerebbero, sarà uno dei punti dell' allineamento cercato.

61. Con un qualunque goniometro è più facile, perchè segnata, dopo le stesse operazioni, la DE, dovendo riuscir questa parallela ad AB, si pianti in A, od in B l' istrumento col quale si faccia l' angolo CAB=CDE prima misurato, o misurato invece l'altro CED, si faccia a questo uguale l' altro CBA, la direzione della AB risultante sarà quella dell' allineamento richiesto.

62. Potrebbe altrimenti ottenersi tale allineamento con un simile istrumento. Si tracci del pari l'allineamento AC e poi l' altro CB, si misurino questi nonchè l'angolo ACB e si situi l' istrumento in un qualunque punto *d* della AC. Or è chiaro che, allineando da *d* la *dc* che faccia con A l' angolo *Adc*=ACB, l' estremo *c* di tale allineamento, di lunghezza uguale ad una quarta proporzio-

nale in ordine alle AC, CB, A*d*, sarà un punto dell' allineamento cercato.

63. Usando la plancetta, si rende più spedita l' operazione, mentre rilevato con la stessa, facendo stazione in C, i tre punti A, B, C e quindi il triangolo ABC; segnata sul disegno una linea *cd* parallela a CB tra' lati AB, AC, si conoscerà per via della scala la lunghezza di essa senza bisogno di determinare la quarta proporzionale, come nel caso precedente, essendo chiaro che, trasportata sul terreno tale parallela e segnato con un picchetto l' estremo *c* di essa, passando dalla scala all' effettiva misura, l' allineamento che passerà pei punti A, *c* dovrà passare benanche per l' altro dato B.

Rilevati i stessi tre punti, sarebbe stato meglio piazzarsi in A, orientando la plancetta e situando il lembo della riga lungo la linea sullo specchio corrispondente alla proiezione della AB, poichè la direzione della diottra avrebbe offerta quella cercata.

64. Che se invece si volesse adoperar la bussola, si sarebbero del pari rilevati gli stessi punti, facendo stazione prima in A e poi in C, ovvero solamente in C (*fig.* 26) e, passando dallo schizzo al disegno proporzionato, si conoscerebbe col semicerchio da tavolino l'angolo BAX che la AB fa col meridiano magnetico; e, piantato l' istrumento in A, si giri in modo che l'ago calamitato segni lo stesso angolo con la direzione del cannocchiale, sarà questa la direzione cercata; che se poi dal punto C non era visibile l'altro B, si sarebbe rilevato un secondo D ed anche un terzo E, se da questo era finalmente visibile il detto punto B; ovvero, se le locali circostanze il permettano, con lo stesso strumento, tracciate da un de'punti A (*fig.* 27) le due rette AD, AC prossime all'allineamento cercato e poi dal punto B le altre due BC, BD rispettivamente a queste parallele, è chiaro che, determinati i punti d' incontro delle stesse, la retta che li unisce, essendo una diagonale del parallelogrammo ACBD, avrà il suo punto medio E appartenente al chiesto allineamento.

Crediamo ora opportuno, prima di passare alla determinazione delle distanze in parte od in tutto inaccessibili, esporre diversi problemi circa alcune operazioni geometriche che si debbono spesso eseguire sul terreno.

PROBL. I.

65. *Costruire sul terreno un angolo uguale ad un angolo dato sulla carta, o sul terreno medesimo.*

Nell'uno e nell'altro caso si attraversino i lati dell'angolo dato con una linea e si misurino i lati del triangolo risultante, se sia dato sul terreno, o le loro corrispondenti lunghezze in parti della data scala si riportino sul terreno facendo cadere il vertice sul punto assegnato in esso ed anche un de' lati su qualche allineamento sul medesimo tracciato, si sarà ottenuto l' intento, senza far uso d' istrumenti.

Con la planchetta od altro strumento gonometrico si è già veduto, parlandosi de' medesimi, il semplice modo di risolvere il presente problema, onde invece passiamo all' altro.

PROBL. II.

66. *Dividere in due parti uguali, o in più parti che si serbino data ragione un angolo dato sul terreno.*

Cas. 1. Si taglino dal vertice due porzioni qualunque uguali su lati dell' angolo dato e si divida per metà la congiungente i punti che risultano segnati su' medesimi, la linea che parte dal vertice e passa per tal punto medio, sarà la bisecante dell'angolo proposto.

Cas. 2. Per dividere lo stesso in più di due parti uguali o che si serbino data ragione, l' è mestieri conoscere con alcun degli strumenti gonometrici il valore di tal angolo e, distribuito in modo che ciascuno degli angoli richiesti risulti del valore che gli compete, con gli stessi strumenti si segnino sul terreno, stando al vertice, questi diversi angoli tra lati del proposto, cui dovrà essere uguale la somma de' valori medesimi.

Con la planchetta si sarebbe rilevato tal angolo e col semicerchio da tavolino si sarebbero segnati i diversi punti tra' suoi lati e quindi le diverse linee partitrici dell'angolo dato in quelli dei valori che debbono a ciascun corrispondere, di poi, continuando a fare stazione al vertice senza muovere l' istrumento, si situerebbe successivamente in dette linee il lembo della riga, e le dire-

zioni della diottra indicherebbero quelle delle cercate linee partitrici sul terreno.

PROBL. III.

67. *Dato sul terreno un' allineamento del tutto accessibile, menare a questo una parallela da un dato punto.*

Sia AB (*fig.* 28) l' allineamento dato ed Y il dato punto. Si può risolvere tal problema in diversi modi.

Operando senza strumenti. Si tracci l'allineamento AY sul terreno, e si prolunghi quanto si voglia in X, si segni il punto C medio di AB e, segnati gli altri tre allineamenti XB, XC, BY, questi due ultimi offriranno il punto d' intersezione Z. Per tal punto e per l' altro A, tracciando un allineamento, il prolungamento di questo incontrerà in M l' altro BX e tal punto M si troverà nella direzione della parallela cercata che passerà per Y.

Operando con la bussola od altro istrumento gonometrico, si risolve facilmente il problema; mentre, segnato un allineamento che passi pel punto dato e s'inclini, alla data retta con un angolo qualunque, si rilevi lo stesso, e piazzato l'istrumento nel dato punto, si segni tal altro allineamento che faccia col contiguo un angolo uguale al rilevato, ma in alterna posizione; sarà desso nella cercata direzione.

Particolarmente con la bussola, basterebbe determinare l' orientazione dell' allineamento dato, cioè l' angolo che in un qualunque punto di questo faccia la medesima con la direzione dell' ago e, fatta stazione nel punto dato, si giri la bussola finchè l' ago calamitato segni lo stesso angolo con la linea N—S della bussola o con la direzione del cannocchiale, ed è chiaro che questo sarà l'allineamento richiesto, il quale in tal modo si sarebbe ottenuto senza segnare alcun allineamento, cui talvolta potrebbero far ostacolo le locali circostanze.

Usando infine la plancetta, si faccia stazione in un qualunque punto del terreno, che potrebbe pure essere uno della retta data essendo accessibile, e si rilevi la direzione di questa non che il punto dato. Ottenuta la proiezione di tal punto sulla tavoletta, si segni per esso sulla medesima una parallela alla proiezione ottenuta del dato allineamento e finalmente, piazzato l' istrumento nel

dato punto, orientato ed orizzontato, si avrà il chiesto allineamento, indicato dalla direzione della diottra poggiata sullo specchio col lembo della sua riga in collimazione della parallela segnata sulla carta.

PROBL. IV.

68. *Dato un allineamento accessibile solo negli estremi, menare a questo una parallela da un punto dato.*

Operando senza strumenti, tracciata la BY, come nel problema precedente, si prenda in essa un punto Z; d'onde sia visibile l'altro A, si misurino le BZ, ZY, AZ e sul prolungamento di quest' ultimo allineamento si tagli da Z la ZM quarta proporzionale in ordine a BZ, ZA, ZY, la congiungente MY sarà la linea cercata. La dimostrazione di ciò è ben chiara atteso la similitudine dei triangoli ABZ, ZMY.

Usando la bussola, od un altro istrumento misuratore di angoli si può operare come nel problema precedente.

Usando invece la plancetta, si dovranno rilevare i detti estremi e 'l punto dato, piazzandosi in ogn'altro punto del terreno fuori la data inaccessibile direzione, e sarà bene piazzarsi nel punto dato, mentre detto punto si troverebbe più sollecitamente rilevato, e si farebbe una stazione. Di poi si tiri per tal punto la parallela, come si è detto di sopra, e si operi nello stesso modo.

PROBL. V.

69. *Dato un punto sul terreno, menare per esso una parallela ad un allineamento del tutto inaccessibile, di cui sieno però solo visibili gli estremi.*

Sia AB (*fig.* 29) la retta data e C il punto dato sul terreno. Tracciata una base CD di cognita distanza, con la bussola ad altro strumento gonometrico si determinino a' punti C, D gli angoli ACD, BCD, BDC, ADC.

Nel triangolo ACD, essendo nota la CD e gli angoli adiacenti in C, D, si conoscerà facilmente l'un de' lati AC (§. 18); similmente il triangolo BCD, presentando gli stessi dati, offrirà del pari simile modo per determinare il lato BC. Conosciuti in-

tanto del tringolo ACB l' angolo C ed i lati che lo comprendono AC, CB, si potrà (§. 13) prontamente determinare il valore di CAB, o di CBA. Piantato allora l' istrumento in C, si tracci l' allineamento EF che faccia con la AC o BC rispettivamente un angolo ECA=CAB, ovvero BCF=ABC. Sarà EF la cercata parallela.

Operando con la plancetta, potevasi ottenere lo stesso scopo, mentre facendo stazione prima in C, si sarebbero rilevati i raggi corrispondenti alle CA, CB, CD e passando in D, punto scelto ad arbitrio, con la misura della CD, orientando ed orizzontando debitamente l' istrumento, si sarebbero rilevate le proiezioni degli altri due raggi DB, DA che, intersegandosi rispettivamente co' primi, avrebbero offerto il rilievo de' punti A,B e quindi della AB; che però sarebbe stato bastevole tirare in lapis sulla tavoletta pel punto indicante la proiezione del dato C una parallela alla linea corrispondente alla AB, mentre, orientato convenevolmente l' istrumento in C, la direzione del cercato allineamento sarebbe quella del cannocchiale della diottra situata col lembo della sua riga in collimazione della parallela anzidetta segnata sullo specchio.

PROBL. VI.

70. *Dato un allineamento sul terreno ed un punto in esso o fuori dello stesso, tracciare da detto punto un' altro allineamento che sia perpendicolare al primo del tutto accessibile.*

Cas. 1. Sia AB (*fig. 30*) l' allineamento dato e C un punto in esso.

Operando senza strumenti, si segnino da ambo le parti del punto C su tale allineamento i punti D,E equidistanti da C: fermati di poi due cordini uguali ma ciascuno maggiore di CD, l'uno con un' estremo in D, e l' altro in E, si tendano e si avvicinino gli altri estremi; il punto di loro incontro F, congiunto con C darà la direzione cercata.

In altro modo, se il punto sia dato all'estremo A (*fig.31*) dell'allineamento AB che non possa prolungarsi verso tal punto, per ostacoli che potrebbe presentare il terreno, si operi così: dal dato punto A si prenda su di esso allineamento AB una porzione AC e messi, come veniam di dire, due cordini AD, DC, tra loro u-

guali e ciascuno ad occhio maggiore della metà di AC, uno con un estremo fisso in A e l'altro con un estremo in C, si segni, del pari tendendoli, il punto D sul terreno comune a'due estremi liberi de' medesimi, si prolunghi la DC in E finchè sia DE $=DC=DA$; allora è chiaro che l' allineamento che si farà passare per A ed E sarà perpendicolare ad AB. Infatti l'angolo EAB è retto poichè l'angolo esteriore ADC del triangolo ADE è uguale a $2DAE = 2DAC$ e pel triangolo medesimo si ha $ADC = 180°-2DAE$, dunque sarà: $2DAC = 180°-2DAE$, che però, passando 2DAE al primo membro e dividendo tutto per 2, si avrà $DAE + DAC = 90°$ ovvero infine $EAB = 90°$.

Altrimenti; diviso un cordino in dodici parti uguali, si segni sulla AB (*fig.* 32) il punto C tale che AC ne contenga 3 e con le rimanenti 9 si compia un triangolo AEC in modo che AE ne contenga 4 ed EC ne contenga 5. Sarà AE la direzione cercata. Ciò è chiaro per essere $\overline{5}^2 = \overline{3}^2 + \overline{4}^2$. Poteva però la AC conteneme 4 e la AE 3.

Operando con la plancetta si segnino sulla stessa due linee tra loro perpendicolari e si piazzi nel punto dato in modo che questo si trovi nella verticale che passa per l' intersezione delle dette linee e che una di esse sia nella stessa direzione dell' allineamento dato, ciò fatto è chiaro che quello che si farà dal punto dato segnare sul terreno nella direzione dell'altra linea, sarà l'allineamento cercato.

Operando con la squadra d'agrimensore. Sia sempre AB (*fig.*33) la data direzione e C il punto dato in essa. Si situi in C la squadra in modo che per una delle fenditure si possa traguardare l' allineamento AB, e già l' altra ad angolo retto con la prima, farà per essa tracciare sul terreno l' allineamento cercato.

Cas. 2.° Se il dato punto stia fuori della retta data (*fig.* 34).

Operando senza strumenti, si applichi a tal punto l' estremo di un cordino di lunghezza approssimativamente maggiore di CD, e traendolo, si descriva con l' altro estremo un arco di cerchio che incontrerà la AB ne' punti E, F. Ciò fatto il punto D, medio di questi, si unisca col punto dato C, e l'emergente allineamento sarà quello cercato.

Potrebbe operarsi in altro modo. Sia C (*fig.* 35) il dato punto fuori la retta data AB; si segni la CE sempre ad occhio maggiore di CA, indi dividendola per metà in D, con un cor-

dino teso DA=DE=DC ed avente un capo fisso in D, si determinerà il punto A, pel quale e pel dato C dovrà, com' è chiaro, passare l' allineamento cercato.

Diversamente; dal dato punto C (*fig.36*) si allinei del pari la EC e questa si misuri, preso inoltre un certo punto D nella data direzione in modo che segnata la DF perpendicolare ad AB (cas. 1.) questa incontri CE, si misurino le FE, ED e finalmente tagliata da E su di AE la porzione EG che sia quarta proporzionale dopo le EF, ED, EC, l' estremo G di essa segnerà un punto dal quale tracciato un allineamento che passi per C, sarà questo il richiesto.

Usando la squadra, si caminerebbe lungo la data AB (*fig.33*), portando l'allineamento di questa in corrispondenza di una delle visuali, finchè si trovi un punto C dal quale sia contemporaneamente visibile il punto D dato per l' altra fenditura; sarà C il punto pel quale tracciato un allineamento che passi per D, risulterà questo perpendicolare al dato.

Con la bussola: si prenda l'orientazione della AB (*fig. 33*) in un qualunque punto della sua direzione, di poi piantato l' istrumento nel dato punto D in modo che l'ago calamitato, situato come si trovava nella prima stazione, descriva un quadrante, fermata indi la bussola, si traguardi pel cannocchiale e la visuale indicherà l'allineamento a tracciarsi.

Operando con la plancetta: si rileveranno due punti ad arbitrio della data direzione e quindi questa, non che il punto dato, di poi, facendo stazione nel medesimo, orientato ed orizzontato lo specchio, si segni su di esso una perpendicolare che parta dal punto indicante la proiezione del dato alla proiezione della data retta, e facendo collimare il lembo della riga con tal perpendicolare, la diottra si troverà nella direzione cercata.

PROBL. VII.

71. *Dato un punto sul terreno, tracciare per esso tale allineamento, che prolungato incontrerebbe normalmente un' altro del tutto inaccessibile e visibile solo negli estremi.*

Segnato sul terreno un' allineamento parallelo al dato e che passi pel dato punto e da questo tracciato un altro ad esso

perpendicolare dovrà quest'ultimo , se potesse prolungarsi , riuscire perpendicolare al dato inaccessibile.

PROBL. VIII.

72. *Prolungare un' allineamento al di là di un ostacolo.*

Usando la plancetta. Si pianti questa in A' (*fig. 37*) uno de'punti dell'allineamento AA' da prolungarsi al di là dell'ostaeolo M, ed orientata , si rilevi un punto A in dietro nell'allineamento medesimo non che un qualunque altro C che fiancheggi l' ostaeolo ; similmente stazionando in C, orientato lo strumento rispetto ad AA', si rilevi altro punto D e così si continuerà fino a che si giugnerà a tal punto E donde possa menarsi la retta EB tale da oltrepassare l' ostacolo ed incontrare la proiezione prolungata sullo specchio della AA'. Allora con la scala prescelta si determini la lunghezza EB, e senza muovere l' istrumento , questa si riporti sul terreno per marcarvi l' estremo B. Finalmente fatta stazione in B, orientato nuovamente lo specchio, si situi su questo la diottra col lembo della sua riga in collimazione della linea in lapis corrispondente ad AA' prolungata, mentre la direzione della diottra sarà quella cercata.

Con la bussola od altro strumento gonometrico si rileverebbe del pari facilmente il punto B da trovarsi nel prolungamento cercato e che corrisponderebbe alla proiezione dell'incontro delle linee corrispondenti al prolungamento di AA' ed alla proiezione di EB, sul disegno che si caverebbe dallo schizzo. Messo di poi in B lo strumento, si tracci sul terreno l'allineamento indefinito BX che faccia con BE l' angolo XBE eguale al corrispondente in disegno, che si conoscerà col semicerchio da tavolino. È chiaro che BX sarà il prolungamento richiesto:

Con la bussola particolarmente si poteva dal punto B far partire tale allineamento BX che avesse avuto l' orientazione stessa della AA' rilevata in A.

Altrimenti Tracciando un allineamento LL', (*fig. 38*) comunque inclinato alla porzione AA' di quello da prolungarsi, si scelgano in esso tre punti *a*,*b*,*c* da' quali si facciano partire altri tre allineamenti *a*A', *b*B, *c*C, che con un qualunque angolo costante s' inclinino alla LL' ed in modo che di questi il primo cada

sull' allineamento dato e gli altri due al di là dell' ostacolo, è chiaro che, conoscendo tale angolo, non che l' altro in L e misurate le La, Lb, Lc, aA', pe' triangoli simili LbB, LcC, si faran note le bB, Cc e per esse il sito de' punti B,C . . . . . . pe' quali dovrà, com' è chiaro, passare l' allineamento cercato. E di leggieri si osserva che con la plancetta poteva prontamente così operarsi.

Con la *squadra d' agrimensore*, se le locali circostanze il permettano, si potrà con speditezza operare nel modo che segue.

Piantata la stessa in A *(fig. 39)* si tracci la Aa perpendicolare ad AA' e caminando per Aa, si scelga in questa tal punto a dal quale possa menarsi ad essa la perpendicolare ab indefinita e tale da non incontrare alcun ostacolo. Similmente in questa si trovi altro punto b dal quale, facendo partire altro allineamento bB perpendicolare alla ab, questo neppure incontri alcun impedimento; si misuri la Aa e sulla bB si tagli da b la parte $Bb = Aa$; l' estremo B di questa marcherà il punto che apparterrà al prolungamento cercato; fatto quindi stazione in B è menato da B l' allineamento $B'B$ perpendicolare a bB, sarà questo nella direzione richiesta.

Se un muro MN*(fig. 40)* si opponga al prolungamento della AB sull' opposto terreno e possa supporsi che riescisse determinare il punto B sul medesimo, come per mezzo di un filo a piombo, abbassato dalla sommità del detto muro.

Se con la bussola o altro strumento misuratore di angoli si debba operare, basterebbe nella parte opposta formare l' angolo $CBN = MBA$, ovvero $CBM = ABN$ e la BC risultante si troverebbe nella data direzione. Per fare uno di essi angoli come $CBN = MBA$ senza istrumento, con un cordino si segni da B una qualunque lunghezza $Bn = Bm$ presa nell' interno, e così pure con due cordini BC, nC ugnali rispettivamente Bc, cm e fermo il primo con un capo in B e 'l secondo con un capo in n, è chiaro che l' incontro degli altri estremi de' medesimi, tenuti ben distesi, indicherà un secondo punto C del chiesto allineamento e quindi quello cercato.

PROBL. IX.

73. ***Data la lunghezza di un allineamento sul terreno inclinato, determinarne la proiezione orizzontale.***

Conoscendo l' angolo A col quale questo s' inclina all' orizzonte e la sua lunghezza a si può determinare la proiezione orizzontale a' per mezzo della formola $a'=a$ cos. A, ma poichè di sovente l' angolo A è piccolissimo, giova meglio calcolare la differenza di a su di a' per maggior esattezza; e si ha

$a-a'=a(1-\cos.A)=2a\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}A$ che è il valore della quantità da sottrarsi dalla data lunghezza inclinata. Tale operazione vien detta da' topografi *riduzione di una distanza all' orizzonte.*

Con la plancetta, con la bussola a diottra mobile e con ogni altro degl' indicati strumenti, perchè possono usarsi tenendo i loro piani orizzontali, come si è detto, o che stando in piano orizzontale, permettono osservare diversi oggetti anche fuori del loro piano, è chiaro che traguardando con essi in linea inclinata due punti del terreno da uno di stazione, l'angolo che formano le due visuali tra loro viene indicato o numericamente o graficamente dall strumento non direttamente ma quale sarebbe in proiezione orizzontale; e però non dovremmo tener parola della riduzione degli angoli osservati all' orizzonte perchè non abbiamo parlato di alcun istrumento come del cerchio ripetitore od altri che non hanno la condizione suddetta.

Ma poichè mi riesce con somma brevità trattare tal problema così mi fo ad esporlo, senza per altro oltrepassare i limiti prestabiliti di questo trattato.

PROBL. X.

74. *Ridurre un' angolo dato all' orizzonte, cioè determinarne la sua proiezione orizzontale.*

Metodo grafico.

In tal problema dati i due angoli che due rette fanno con la verticale e quello che fan tra loro, si cerca la proiezione di questo sul piano orizzontale. Sia ab (*fig.* 41) la verticale ed A, B, C rispettivamente i tre angoli enunciati; per un punto qualunque b si meni l' orizzontale bc. Presa $ag=ae$, descrivasi il triangolo bdh i cui lati siano $bh=be$, $dh=dg$ e bd; l' angolo dbh sarà quello cercato.

Se invece di esser dati i tre angoli, ne fossero dati alcuni o tutti di essi per mezzo di rette misurate (p. e. A, dato ak, ab, bk), sarà facile ricavarne a parte gli angoli e sempre risolvere il problema colla precedente costruzione.

Cor. Se si cercasse C′ angolo al vertice di un triangolo proiettato sul piano orizzontale, conoscendo i due angoli alla base, si avrebbe C′ supplemento dei due anzidetti e l'operazione sarebbe del resto identica all' esposta.

Metodo analitico.

Se ab si assuma $=1$, sarà $bd=$tang. A, $be=$tang. B, $ad=$sec. A, $ae=$sec. B, ed inoltre $(dh)^2=(dg)^2=(ag)^2+(ad)^2-2(ag)(ad)\cos. C=\sec.^2 B+\sec.^2 A-2\sec. B\sec. A\cos. C$.

Da ciò risulta $\cos. dbh=\cos. U=\frac{(bd)^2+(bh)^2-(dh)^2}{2(bd)(bh)}$

$$=\frac{\text{tang.}^2 A+\text{tang.}^2 B-\sec.^2 A-\sec.^2 B+2\sec. A\sec. B\cos. C}{2\,\text{tang. A tang. B}},$$

ed, esprimendo le tangenti e secanti pe' seni e coseni soltanto, si ha

$$\cos. U=\frac{\cos. C-\cos. A\cos. B}{\text{sen. A sen. B}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

che corrisponde ad una delle fondamentali formole di trigonometria sferica.

Questa formola poco comoda pel calcolo numerico per mezzo de' logaritmi, potrà trasformarsi in altra composta di fattori. A tal fine si osservi che

$$1-\cos. U=1-\frac{\cos. C-\cos. A\cos. B}{\text{sen. }A\text{ sen. }B}$$

$$=\frac{\text{sen. }A\text{ sen. }B+\cos. A\cos. B-\cos. C}{\text{sen. }A\text{ sen. }B}$$

$$=\frac{\cos.(A-B)-\cos C}{\text{sen. }A\text{ sen. }B}=\frac{2\text{ sen. }{}^1/_2(A+B-C)\text{ sen. }{}^1/_2(A+C-B)}{\text{sen. }A\text{ sen. }B}$$

ma $1-\cos. U=2\text{ sen.}^2\frac{1}{2}U$, dunque

$$\text{sen. }\frac{1}{2}U=\sqrt{\left(\frac{\text{sen. }{}^1/_2(A+B-C)\text{ sen. }{}^1/_2(A+C-B)}{\text{sen. }A\text{ sen. }B}\right)}\ldots(b)$$

la quale dev' essere preferita alla (*a*) pe' calcoli numerici.

ARTICOLO II.

DELLA DETERMINAZIONE DELLE DISTANZE IN PARTE OD IN TUTTO INACCESSIBILI.

PROBL. I.

75. *Determinare la lunghezza di un' allineamento di cui sieno solamente accessibili gli estremi.*

Può in diversi modi risolversi tal problema.

Operando con la squadra come nella figura 39, ed ottenuto il rettangolo ABCD (*fig.* 42), essendo A,B gli estremi della retta a determinarsi, si misuri il lato CD e tal misura esprimerà la cercata distanza.

Con qualunque strumento gonometrico. Sia AB (*fig.*43) la retta data, si segni sul terreno adiacente una linea CD secondo una qualunque direzione ed a questa s' inclinino le DB, CA tra loro parallele che passino rispettivamente pe' punti A,B; si misurino queste, e la loro differenza si aggiunga per dritto alla più corta o si tolga dalla più lunga; la linea CD nel primo caso, o la EF nel secondo, che uniscono l'estremo di una delle paral-

lele col punto che risulta determinato nella direzione dell' altra, sarà uguale alla distanza cercata.

O pure, facendo uso degli stessi strumenti, è chiaro che, inclinando comunque alla AB (*fig.* 44) la AC e da un qualunque punto *a* di questa menando (§. 68) alla stessa AB la parallela *ab* fino ad incontrare l' allineamento CB segnato sul terreno, la quarta proporzionale in ordine alle C*a*, *ab*, CA, che si misurerebbero sul terreno, dinoterà la distanza cercata.

Se il terreno non permetta potersi tracciare tra i due allineamenti CA, CB, nè tra i loro prolungamenti oltre il punto C, che sarebbe lo stesso, allora determinato l' angolo in C e conosciute le AC, AB, si farà nota la AB (§. 13).

Che se sarà permesso dalle locali circostanze potersi con uno degli strumenti medesimi piazzare in tal punto C, che, menando per esso le due visuali CA, CB, inclinate tra loro a 45°, queste passino rispettivamente pei punti A, B, in tal caso misurate le stesse, sarà $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$, e tal soluzione sarà ben vantaggiosa, particolarmente quando i punti A, B siano di più tra loro invisibili.

Operando con la plancetta è chiaro che, piantata la stessa in un qualunque punto C, e rilevati i punti A, B, la distanza delle loro proiezioni indicherà pel mezzo della scala medesima la lunghezza, che corrisponderebbe alla AB sul terreno.

Con la bussola si potevano rilevare gli stessi punti, e passando dallo schizzo al disegno in proporzione si sarebbe ottenuto similmente con la scala adottata la distanza richiesta.

Ma il *telegometro*, e la *stadia* avrebbero evitato tali operazioni (che pur si sarebbero per essi facilitate), bastando situarsi in uno dei punti A, e traguardare rispettivamente lo scopo, o la mira a stadia piantata all' altro punto B, se dessi però fossero tra loro visibili.

PROBL. II.

76. *Determinare la distanza tra due punti sul terreno de' quali un solo sia accessibile.*

1. *Operando con la squadra* e supposto che il solo punto A(*fig.45*) della distanza AB sia accessibile ; si meni da tal punto alla AB la perpendicolare AC , misurata questa , e segnato in essa il punto medio D, si camini per una perpendicolare indefinita alla AC , tracciata per C , si segni in essa un punto E , che si trovi nell' allineamento degli altri due D , B ; ciò fatto , per l' ugua-glianza dei triangoli ADB , CDE , la lunghezza della EC indi-cherà quella cercata.

2. Se la distanza AB(*fig.46*) fosse molto considerevole ed il terre-no adiacente non permetta l'operazione indicata, che avrebbe biso-gno di molto spazio , basterebbe innalzare da C una più corta perpendicolare CD alla AC e dal punto D , traguardando l' al-tro inaccessibile B , marcare sulla AC il suo incontro E con detta visuale DB. Pe' triangoli AEB , DEC , ora solamente si-mili , si avrà la cercata distanza espressa da una quarta propor-zionale dopo le EC , CD , EA che possono facilmente misu-rarsi.

3. Si osservi che non si sarebbe diversamente risoluto il problema, se si fosse prolungata la AB (*fig. 47*), e da un punto A′ di tal prolungamento innalzata a questo la perpendicolare AC e final-mente, traguardando da C il punto B siasi segnato parte dell'alli-neamento di questi punti di tal lunghezza che incontri una per-pendicolare DE alla A′C da un qualunque punto D di questa. Dipoi, misurata la AA′ e le altre CA′, CD, DE, siasi avuta, dalla quarta proporzionale in ordine a queste tre ultime dimenzioni , la lunghezza A′B e quindi AB=A′B—AA′.

4. *Altrimenti* , *facendo uso di un qualunque strumento goniometrico.* Conoscendo solo la perpendicolare AE di arbitra-ria lunghezza (*fig. 46*) tirata dal punto A alla AB e determi-nato in E l' angolo AEB che tal perpendicolare forma con la visuale EB , si otterrebbe pel triangolo ABE , isoscele quanto più sia possibile , la seguente proporzione

1 : tang. E :: AE : AB , donde

AB=AE tang. E, che si farà nota operando per logaritmi.

5. Che se non potesse tracciarsi da A (*fig.48*) la perpendicolare alla AB si potrebbe segnare questa , facendola partire da un altro punto A′ del prolungamento di AB ed allora , com' è chiaro , determinato l' angolo in C′ e misurate le A′ C′ , A′ A′ , si avrà

$$AB=(A'C' \text{ tang. } C')-AA'$$

Sogliono gli ufficiali di marina determinare le discrete distanze del luogo ove si trovano col legno a quello di altro bastimento, di un porto ec., risolvendo il triangolo rettangolo formato dall'orizzontale condotta pel piede dell' albero maestro al punto dato e che dinota la cercata distanza , dall' altezza nota dell' albero e dalla visuale condotta per la sommità del medesimo al dato scopo ; determinando a tal estremo l' angolo acuto di tal triangolo.

6. Continuando a far uso di un qualunque strumento gonometrico , è più facile la soluzione di tal problema , laddove riesca potersi piazzare ad un punto C , nella detta perpendicolare AC, dal quale, traguardando il punto B la visuale corrispondente s' inclini ad AC con un angolo di 45°, mentre allora basterebbe misurare AC perchè AC=AB.

7. Se per le difficoltà del terreno non si possa menare da A alla AB la perpendicolare AC , s' inclini questa alla prima con un angolo qualunque , di poi conoscendo tal angolo , e determinando del pari co' detti strumenti l' altro in C , si misuri AC e nel triangolo obbliquangolo ACB si conoscerà il terzo angolo B (§. 18) e quindi la distanza cercata.

8. *Con la plancetta.* Si faccia stazione in A e, situato convenevolmente l' istrumento si rilevi un punto C dal quale sia visibile l' altro B e questo si rilevi stazionando in C. Si avrà la proiezione di AB che in parti della scala adottata renderà nota l' effettiva misura della stessa sul terreno.

9. Quanto si è detto si rileva di leggieri potersi applicare alla determinazione della larghezza di un fiume, potendosi operare sopra una delle sponde, ed alla soluzione di altri simili problemi.

Cor. Anche l' altezza A′B (*fig. 47*) di un edificio accessibile al piede A′ potrebbe determinarsi nel modo indicato nel n.° 3 del presente problema , sol che si consideri verticale il piano orizzontale su cui si è supposto operare , e DE un bastone no-

malmente confitto nel terreno orizzontale rappresentato da A'C. Co' numeri 4 e 7 del problema medesimo fatte le stesse considerazioni si può pure risolvere il quesito.

Anche col n.° 8 si risolverebbe nel caso che il terreno sia inclinato all' orizzonte o che l' edificio sia a scarpa. Se, stando in un punto C (*fig.* 49), perchè più sollevato dell' altro B, potessero contemporaneamente traguardarsi i punti A, B pe' due cateti di una squadra, ovvero sotto un' angolo retto, allora segnato il punto D ove la visuale orizzontale CD incontri l' edificio, si misuri la BC e la BD sottraendo l' altezza dello strumento, e si determini la $CD=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{BD}^2}$. È chiaro, per la proprietà del triangolo rettangolo ACB che, dovendo essere $AD=\frac{\overline{AC}^2}{BD}$ sarà

$$AD+DB=\frac{\overline{CD}^2}{DB}+DB \text{ ovvero } AB=\frac{\overline{CD}^2+\overline{DB}^2}{DB}$$

ARTICOLO III.

DETERMINARE LE DISTANZE TRA DUE PUNTI VISIBILI MA INACCESSIBILI.

PROBL. I.

77. *Dati due punti inaccessibili sul terreno, determinare la distanza tra essi.*

1. *Operando con la squadra*, se possa scegliersi sul terreno un tal punto C (*fig.* 50) dal quale si potessero osservare gli estremi della AB per le due visuali CA, CB tra loro perpendicolari, si allinei sul terreno medesimo la DE ad occhio parallela alla AB e su di essa da' punti A, C si abbassino le perpendicolari rispettive AD, BE.

Essendo $AB=\sqrt{\overline{Ab}^2+\overline{Bb}^2}$, supponendo un' allineamento Ab parallelo a DE e che passi per A, sarà

$$AB=\sqrt{\left(\overline{DE}^2+(BE-AD)^2\right)}=\sqrt{\left(\overline{DE}^2+(CE-CD)^2\right)}$$
$$=\sqrt{\left(2(\overline{CE}^2+CD^2)\right)}$$

2. Con minore speditezza potevasi determinare sul terreno una parallela alla data retta (§. 69) mentre la porzione che s' intercetterebbe tra le perpendicolari a questa abbassata dagli estremi A , B (§. 70 cas. 2.°), sarebbe di lunghezza uguale a quella della AB cercata.

3. Che se sarà permesso dalle circostanze locali , si scelga tal punto C (*fig. 52*) in maniera che le due visuali dirette a' punti A , B sieno ad angolo retto tra loro. Il triangolo ACB sarà rettangolo in C ; si prolunghi verso D la visuale CB fino a che possa una visuale DA inclinata a 45° a DB passare per A. Si retroceda sulla DC e per un punto G ad arbitrio, si innalzi a questa la perpendicolare GF fino ad incontrare la DA in F ; inoltre si misurino le DG , GF , DC e si avrà DG : FG :: DC : AC , donde $AC=\frac{DC\times FG}{DG}$, similmente prolungando la AC si otterrebbe il valore di BC e quindi nel triangolo rettangolo ACB , conoscendo i due cateti AC , CB , si conoscerà AB, mentre

$$AB=\sqrt{\overline{BC^2+CB^2}}$$

4. *Con qualunque strumento gonometrico.* Sieno A,D (*fig.51*) i punti dati inaccessibili perchè attraversati da un burrone, una valle od altro locale impedimento. Scelgansi due punti C, D sul terreno in modo che , serbandosi tra loro una distanza pressochè uguale ad AB , da ognuno di essi sia visibile ciascuno dei punti A, B. Si misuri la CD e si operi come nel §. 69 finchè giunti a risolvere il triangolo ADB si determini in questo il lato AB.

5. Che se, per le grandi irregolarità del suolo, non possa misurarsi che la sola C D e questa sia così disposta che dall'estremo C non sia visibile il punto B e dall' altro D non sia visibile il punto A ; scelgasi sul terreno tale stazione O d' onde sieno visibili i 4 punti A, B, C, D e si rilevino gli angoli formati in O dalle visuali dirette ad essi , non che gli altri CDO , DCO , ACO.

Per mezzo del triangolo DOC si conosceranno le OC e DO (§. 18
Nel triangolo COA, conoscendosi CO, e gli angoli adiacenti AOC,

ACO, si conoscerà AO (§. 18), determinata la quale e la BO, che si farà nota per la risoluzione del triangolo DBO (§. 18) si determinerà infine la cercata distanza AB, risolvendo il triangolo AOB (§. 13).

6. *Operando con la plancetta*, è facile intendere il modo, come poteasi tal misura ottenere nei due precedenti numeri per intersezioni; mentre nel primo caso, fatta prima stazione in C, si sarebbero segnate le visuali C A, C B, e rilevato il punto D si sarebbe fatto in questo altra stazione, disponendo convenevolmente lo strumento, e segnate sullo specchio del medesimo le proiezioni delle due D A, D B, questi due raggi avrebbero coi primi due determinati due punti d'intersezioni dinotanti le proiezioni di quelli A, B. Nel secondo caso poi, fatta prima stazione in D, segnate le visuali D B, D O e rilevato il punto C, misurando la DC, si sarebbe piantato in C debitamente la plancetta, segnata sullo specchio di essa la visuale C A, e determinata con l' altra visuale C O per intersezione il punto O, si sarebbe segnato questo sul terreno, ed ivi fatta stazione, orientando l' istrumento convenevolmente, i punti A, B si sarebbero ottenuti per intersezione con le visuali OA, OB. Dopo ciò che si è detto può facilmente risolversi il seguente

PROBL. II.

78. *Determinare l' altezza di un edificio inaccessibile al piede, ovvero quella di un monte dal piano orizzontale disteso per l' occhio dell' osservatore.*

Cas. 1.° Se il terreno sia orizzontale, o meglio ad angolo retto con l' altezza richiesta, e di più supponendo che possa trovarsi sul terreno al retta DC (*fig.53*), che con le due visuali DA, CA formi un triangolo equilatero, o che è lo stesso, che i due angoli in D,C siano ciascuno uguale a 60.° (nel qual caso è evidente che si ottiene anche tale angolo, costruendo un triangolo con tre righe di eguale lunghezza), si misuri DC, che sarà uguale ad AC, ovvero all' ipotenusa del triangolo ACB, rettangolo in B. Si osservi inoltre col grafometro l' angolo ACB e si farà nota la AB (§. 9 cas. 2.°); che se non possa, così condizionata, determinarsi la CD, allora, tracciata comunque tale linea e deter-

minati gli emergenti angoli ADC, ACD, si misuri CD, e si determini la AC, risolvendo il triangolo ACD (§. 18), determinata la quale, si prosegui, come si è detto, l'operazione.

Cas. 2.° Se l'altezza cercata sia inclinata al terreno, allora, come veniam di dire, si determinerebbe la CA (*fig. 54*), e risolvendo l'altro triangolo CDB, del quale si conosce CD, si possono determinare gli angoli in D, C (§. 18) e 'l valore di CB, col quale e con CA, determinando l'angolo ACB del triangolo ACB, si risolverebbe questo finalmente, e si conoscerà (§. 13) il terzo lato AB, ovvero l' altezza richiesta.

Scol. Ed or si presenta facile *la determinazione dell' angolo, col quale una falda di quasi uniforme pendio di un monte, o di una collina inaccessibile s' inclina all' orizzonte.*

Per modo che se vogliasi l'angolo ABO (*fig. 55*) che la falda AB del monte, fa con l' orizzonte apparente BO che passi per l' occhio dell' osservatore, si scelga sull' adiacente terreno un punto di convenevole posizione pel quale s' intenda passare un piano orizzontale, che incontri in B la falda ed in un certo punto D normalmente la AD, che s' immagini passare per A. Tracciata dal punto C una base CE, con questa si determini la lunghezza AB e l' altra AC (§. 77). Nel triangolo rettangolo ACD si misuri l' angolo in C, e si conoscerà AD (§. 9 cas. 2.°); con questa, e con AB nel triangolo rettangolo ADB, si conoscerà finalmente l' angolo in B (§. 9 cas. 1.°) (*).

(*) Nominato dall' Accademia delle Scienze di Napoli in Commissione per la peregrinazione in Basilicata per gli avvenimenti del tremuoto di Melfi, non diversamente operai per determinare l' inclinazione della falda meridionale del Vulture all' orizzonte mediante una base che stabilii tra' paesi di Rionero ed Atella stanti alla parte orientale del monte anzidetto, e soltanto corressi le diverse distanze orizzontali giusta le norme che si esporranno nella Parte IV. di questo Trattato. Vedi rapporto all' Accademia delle Scienze, tornata del dì 7 Novembre 1851 pag. 38.

SEZIONE II.

Del modo di levare diverse piante topografiche.

79. Per *pianta* di un terreno s' intende la proiezione orizzontale del medesimo, cioè la figura simile a quella risultante dal contorno che passerebbe pe' piedi delle perpendicolari menate su di un piano orizzoutale pe' diversi punti del contorno del terreno dato; che però di questo dicesi *levar la pianta*, cioè determinarne la proiezione orizzontale, ed a questa, anzichè all'effettiva misura de' terreni inclinati, debbe tenersi l' operatore topografo, giusta la decisione dell'Accademia di Parigi, journal des scavants Juillet 1772, e perchè la misura del secondo risulta sempre del primo maggiore, ed intanto è ben noto che le piante crescendo normalmente all' orizzonte, saranno sempre in egual numero nel primo e nel secondo, ed anche perchè difficilmente potrebbesi rinvenire un terreno di costante inclinazione, ed aversi il vero sviluppo della superficie di un monte o di una vallata, quand' anche di questo vi fosse mestieri.

Dopo ciò che si è fin qui esposto siamo a parlare del modo di levare la pianta di un qualunque terreno ovvero ad esporre i diversi metodi da avvalersi secondo le svariate circostanze, usando più o meno opportunamente alcuno de' già descritti strumenti, senza che dovremo mai intrattenerci di proposito sul modo di condurci per superare le difficoltà che potrebbe opporre lo stato del luogo. E però cominciamo per esporre il seguente

PROBL. GENERALE

80. *Levare con diversi strumenti la pianta di un terreno poligonale accessibile internamente e nell' esterno.*

Con diversi strumenti può levarsi la pianta di un qualunque terreno e con diversi metodi che riduconsi a tre detti da' francesi d'*intersection*, de *cheminement* e de *rayonement* e corrispondono rispettivamente a quelli d' *intersezione*, a *stazioni successive* ed *a stazioni centrali*. Noi però andiamo ad esporre i medesimi col modo di applicarli usando differenti strumenti, per modo che il resto de' problemi quasi non riguarderanno che il mezzo di usare tali

metodi con maggiore o minore vantaggio pel risparmio di tempo, esattezza dell' operazioni e scelta di essi a seconda le locali circostanze.

Metodo per intersezione.

Il significato di tal voce già ne avverte che tal metodo consista nel determinare le proiezioni de'puntt principali del contorno di un terreoo per via d' intersezioni di linee indicaoti talune visuali ; che però :

Sia a doversi levare la pianta del terreoo ABCDEF (*fig.56*) di figura poligonale accessibile internamente e nell' esteroo.

Operando con la plancetta, orizzontata ed orientata, si segni su di essa una scala. Si scelgano due punti x, y nell' estensiooe data, (che potrebbero scegliersi fuori di essa o fioalmente nel perimetro della stessa, oel qual caso sarebbero sempre a scegliersi gli estremi del lato maggiore). Fatta stazione in x si giri la diottra intorno il puoto che dinota la sua proiezione in tavoletta. Si traguardino tutt' i punti principali A, B, C ec. del contoroo, non che il puoto y, già tutti marcati con alcune paline, e segnate le visuali corrispondeoti iòdefinite, si esegua la misura della sola xy che riportata sulla scala determinerà la sua proiezione in tavoletta. Trasportato l' istrumeoto in y e messo ivi in istazione, si orienti giraodolo in modo che la linea meridiaoa, segnata prima sulla carta, coincida con quella del meridiano magnetico del luogo, allora collimando con la diottra il raggio corrispondente ad xy, si traguardi per essa il puoto x, quantunque sarebbe bastato traguardare solamente tal punto per fissare la plancetta. Ciò fatto, si giri la diottra col lembo della riga intorno il punto proiezione di y e, traguardando successivameote gli stessi puoti A, B, C ec., si avranno, segnando le rispettive visuali sulla carta, i puoti d' intersezione di queste con le prime, già segnate stazionaodo in x, questi indicheranno quelli del contorno del terreno dato, di cui però resterà determinato il perimetro nella sua proiezione orizzontale.

Operando con la bussola, col grafometro o con altro gonometrico strumento, esclusa la squadra d' agrimensore, si situi del pari uoo di questi nel puoto x e si rilevino gli angoli AxB, BxC CxD DxC ec. Dxy formati in tal punto dalle visuali xA, xB $xC...xy$, e i valori di tali angoli si segnino tra i rispettivi lati su di uno

schizzo, e su di un registro che potrebbe avere la seguente forma

Stazioni	Punti osservati	Angoli	Osservazioni
x	A		ang. Dxy =
	B		
	C		
	ec.		
	y		xy =
y	A		
	B		
	C		
	ec.		
	x		

Si trasporti inoltre l' istrumento nell' altro punto y, misurando la xy segnando tal lunghezza nella colonna *Osservazioni*, e traguardando i punti A,B,C, ec. e si rilevino gli angoli AyB,ByC, CyD ec.Dyx che le visuali yA,yB,yC,yD,yx fanno tra loro nel punto y, e, notati finalmente del pari i numeri indicanti i rispettivi valori di essi, si otterrà con le operazioni di tavolino e mediante una scala e 'l semicerchio di talco, l' effettivo disegno della pianta cercata.

Si procuri però che le visuali ne' diversi punti d' intersezione non formino tra loro angoli maggiori di 120° ne' minori di 60° perchè detti punti vengano con più precisione determinati.

Possono essere più di due le stazioni, come in seguito si vedrà.

Metodo a stazioni successive.

Tal metodo sta nel fare stazione in diversi punti del terreno che si succedano, percorrendo una linea dello stesso, come il contorno di esso, l' andamento di una strada, un ruscello, sentiero ec. nel medesimo.

Operando con la plancetta. Sia a rilevarsi la pianta del terreno medesimo; si segnino con delle paline i principali punti, vertici degli angoli della figura ond' è circoscritto, fatto stazione in un di essi A (*fig. 57*) avendo prima segnata la proiezione di tal punto sullo specchio, si rilevi il seguente punto B, trasportato inoltre l' istrumento in tal punto, si metta quivi in istazione, si orizzonti ed orienti per rispetto alla precedente stazione e così si rilevi un terzo punto C e facendo stazione in C si operi del pari, con-

tinuando a fare stazione successivamente ne'punti D,E ec. I punti rilevati in tavoletta corrisponderanno, com' è chiaro, alle proiezioni di quelli marcati sul suolo e per essi passerà l' andamento richiesto od il contorno della pianta cercata.

Usando la bussola od altro strumento di simile uso, si può avvalere dello stesso metodo; poichè facendo stazione al punto A si traguardi il seguente B, segnando sullo schizzo l'orientazione della AB e la lunghezza della sua proiezione orizzontale, misurata che sia. Passando l' istrumento in B si traguardi C e si operi similmente per l' orientazione della BC e per la sua lunghezza. Continuando in tal modo è chiaro che, giunto al punto F ultima stazione, si saranno ottenuti quanti dati saran necessarii per eseguire, mediante una scala e'l semicerchio da tavolino, l'effettivo disegno richiesto; usando tal metodo il registro potrebbe avere la seguente ripartizione.

Stazioni	Punti osservati	Angoli di ciascun lato con la meridiana	Lati	Osservazioni
A	B		AB=	
B	C		BC=	
C	D		ec.	
ec.	ec.			

Cor. Si potrebbe del pari operare, usando la bussola con minore esattezza, ma con risparmio di tempo, trascurando alternativamente una stazione, purchè il terreno il permetta; perchè facendo con tale strumento a' punti A,C le osservazioni dirette ed opposte, si può risparmiare la stazione in B, essendo l' angolo diretto che in tal punto si osserverebbe, uguale al supplemento dell' angolo opposto osservato in C.

Metodo a stazioni centrali

Questo consiste in ottenere diverse visuali che partano da un punto scelto nel terreno, nel suo contorno, o fuori di esso, delle quali si conoscano le misure in proiezione orizzontale non che gli angoli che desse fanno tra loro ne' punti di stazione (§. 73).

Operando con la plancetta. È chiaro che, fissata in un punto X (*fig. 58*) dentro del terreno (e potrebb' essere anche fuori del medesimo o nel perimetro di esso) e con le debite avver-

tenze, segnato sullo specchio un punto a dinotare la proiezione di X, intorno al medesimo si faccia girare il lembo dalla riga della diottra per la quale si traguardino i punti A, B, C, D marcati con delle paline od altri segni naturali e, tagliate sulle visuali risultanti sul foglio le diverse porzioni corrispondenti in parti della scala rispettivamente alle lunghezze delle XA, XB, XC, XD ec. gli estremi di tali raggi segneranno i diversi punti del contorno del cercato disegno.

Operando con altro gonometrico strumento, esclusa sempre la squadra, è ben facile intendere che, piantato uno di essi al punto X e traguardando i punti A,B,C,D ec. si debbono misurare le distanze XA, XB ec. per ricavarne le proiezioni orizzontali (§.73) non che gli angoli che tali rette formano tra loro (§. 74) e segnare su di uno schizzo con tutta esattezza i numeri indicanti tali misure ed i gradi degli angoli osservati, perchè, operando a tavolino si possa da esso dedurre l' effettivo disegno cercato.

Con la squadra di agrimensore non potrebbero aver luogo tali metodi, come abbiam prevenuto; però puossi con speditezza levare la pianta di un terreno come quello di cui parliamo, riferendo i punti principali ad una o più linee, così dette *direttrici* allineate sul terreno tra loro ad angolo retto e secondo il criterio del topografo dentro o fuori del terreno o lungo un dei lati di esso, mediante perpendicolari abbassate su le medesime dai detti punti.

Così sarebbe bastevole una sola direttrice AD (*fig.* 59) quando percorrendo per essa con lo strumento si possano traguardare a dritta ed a sinistra gli accidenti maggiori e principali del terreno ABCDEFG perchè allora, fatto uno schizzo della pianta, od un disegno eseguito a vista, nel quale vengano segnate le direttrici e le linee perpendicolari con lettere, si misurino dette perpendicolari con ordine successivo; cioè le B*b*, G*g* ec. e del pari le corrispondenti distanze A*b*, A*g*, A*f* ec., si segnino inoltre i valori di queste in un registro, distinguendovi per maggior chiarezza ed a scanso di equivoci col segno + le perpendicolari che sono a dritta della direttrice e col segno — quelle a sinistra.

Tale registro potrebbe avere la seguente distribuzione

Direttrici		Perpendicolari		Osservazioni
AD	A*b*	B*b*		
	A*g*	....	G*g*	
	A*f*	....	F*f*	
	ec.	ec.	ec.	

Nella colonna *Osservazioni* può segnarsi quanto è necessario ricordarsi per l' esatta configurazione della pianta, operando a tavolino.

Che se il terreno fosse stato ABCDEF (*fig*.60), avrebbesi potuto con vantaggio scegliere per direttrice il lato AF e sarebbero state sufficienti le distanze A*b*, A*c*, A*d* ec. e le corrispondenti perpendicolari B*b*, C*c*, D*d* ec.

Finalmente poteva scegliersi la direttrice AB (*fig*.61) fuori del terreno, quando, dovendo rilevare il terreno CDEFGHL, non riuscirebbero confuse le distanze delle perpendicolari AC, D*d*, L*l*, E*e*, H*h* ec.

Potrebbe inoltre dall' accorto topografo, nel rilevare la pianta del terreno ABCD ec. (*fig*. 62) sentirsi il bisogno di una seconda direttrice CL, oltre della prima AE ed a questa perpendicolare, ovvero di alcune direttrici AC, CF formanti diagonali del terreno ABCDE ec. (*fig*. 63).

O finalmente, tracciando le due direttrici AB, AC fuori del perimetro tra loro perpendicolari (*fig*. 64), riferendo sempre i vertici del dato poligono a tali linee mediante perpendicolari su queste menate da' detti punti. In ciascuno di tali casi si otterrà il rilievo delle richieste piante, avendo presenti i corrispondenti registri e gli schizzi indicati nelle cennate figure e basta per tali casi farsi un idea del progresso delle operazioni dalla semplice ispezione delle figure citate.

Usando un qualunque strumento misuratore di angoli, si potrà operare come si è detto con la squadra, facendo ad angolo qualunque inclinare le direttrici tra loro ed a ciascuna di queste le corrispondenti ordinate, è però interessante che gli angoli sieno ben segnati sullo schizzo e la costante inclinazione è sempre a prescegliersi almeno per le ordinate di ciascuna direttrice.

Si procuri di non prendere equivoco de' diversi punti da quali si stabilisce il computo delle ascisse sulle direttrici.

Finalmente, laddove non si possano per le locali circostanze stabilire una o più direttrici tutte all'esterno o tutte all'interno, si può usare il seguente metodo percorrendo esternamente od internamente, o parte esternamente e parte all'interno, ma sempre prossimamente, il contorno del terreno dato. Partendo da un punto A (*fig.* 65) del perimetro si misuri un' allineamento Aa prossimo ad esso e, piantata in a la squadra si meni alla Aa la perpendicolare aa', e si misuri la stessa. Facendo stazione in a' si meni la $a'b$ perpendicolare ad aa' e per b supposto che per l'incurvamento del perimetro non si possa dal lato stesso operare, si meni la $bb'b''$ perpendicolare ad $a'b$ e del pari si misurino le $a'b$, bb', $b'b''$ e facendo stazione in b'' si continui l' operazion come appare dalla figura. È chiaro che, misurando sempre le diverse perpendicolari, i punti A, a', b', c_1 d ec. apparterranno al cercato perimetro.

È chiaro intanto, che con la bussola od altro strumento gonometrico si sarebbe ottenuto l' istesso scopo, conoscendo gli angoli tra loro successivamente formati, che avrebbero potuto essere arbitrarii e diversi, conoscendo sempre le misure delle distanze anzidette. Così si supererebbero maggiori opposizioni che può presentare il terreno.

I casi finora esposti par che sieno sufficienti affinchè il topografo possa avvalersi della squadra ne' rilievi delle diverse piante.

81. Dopo la risoluzione del problema così generale che veniam di esporre, facciamo seguire i seguenti utili corollarii che formano tanti separati problemi necessariissimi per gli usi topografici.

Cor. 1.° Se il terreno di cui si domanda la pianta fosse accessibile nel solo perimetro potrebbe questa ottenersi col metodo a *stazioni successive* (§. 80).

Cor. 2.° Se non tutt' i punti del perimetro fossero accessibili, ma tutti visibili da ciascuno di due scelti in esso, che sieno accessibili, fatta stazione in quei due punti si usi il metodo *ad intersezione* (§. 80) e così si determineranno i rimanenti.

Cor. 3.° Supposto sempre che non tutti i punti del perimetro sieno accessibili, ma che da ciascuno de' due punti scelti per istazioni non sieno visibili i rimanenti tutti, allora di questi si determineranno da' detti due punti (*cor. prec.*) quelli soli da entrambi visibili, ed altro nel detto perimetro similmente condizionato dal

quale però del pari che da uno de' due primi sieno visibili tutti i rimanenti punti, ed in questi due ultimi, facendo stazione si determinino i medesimi con lo stesso metodo.

Cor. 4.° Che se nella stessa ipotesi accada di più che dall'uno e dall'altro di que' primi due punti sia invisibile alcuno de' rimanenti del perimetro, si sceglieranno altri due punti, rilevando le loro posizioni dalle prime stazioni, e tali che i punti a determinarsi sieno visibili da ciascuno di essi ed in questi, facendo stazione ed usando lo stesso metodo, si potranno facilmente determinare. In modo che s' intende che ogni punto principale del contorno a rilevarsi debba essere per lo meno visibile da due di essi scelti nel medesimo.

Cor. 5.° Il rilievo adunque di un lago, di un bosco, o vallata ec. riuscirebbe facile ad eseguirsi dopo quanto si è detto ne' precedenti corollarii.

Cor. 6.° Se il terreno fosse tutto accessibile all'interno è chiaro che potrebbe usarsi il sistema a coordinate, operando internamente. Ovvero, facendo stazione in un sol punto del mezzo dal quale sieno visibili quelli del perimetro, si potrebbero i medesimi rilevare a *stazione centrale*. Che se alcuni di essi non sieno visibili da tal punto, se ne scelgano altri due nel dato terreno da quali sieno visibili ed ivi si operi per *intersezione* (cor. 2.°).

Cor. 7.° Se alcun punto del perimetro sia invisibile da uno di essi, o da entrambi, si scelga un terzo, un quarto punto ec. nell' aia medesima, rilevandoli a stazioni successive, finchè siesi giunto in tal sito del terreno, ove si possa operare come nel corollario precedente.

Cor. 8.° Finalmente volendosi la pianta di un terreno di cui sia solo accessibile l'esterno può operarsi come ne' due corollarii precedenti, considerando però le operazioni fatte all' esterno.

Ovvero, operando a stazioni successive, si può andar circoscrivendo tutt' all' intorno un poligono quanto più sia possibile concentrico a quello del terreno dato, ed a diversi punti de' lati di tale esterno perimetro fare varie battute per determinare i vertici o punti principali del perimetro dato. Tali battute possono pure essere delle parallele tra loro inclinate comunque a' lati del poligono circoscritto, bastando solo conoscere l' angolo col quale ciascuna di tali linee, s' inclina a' lati di questo, non che le distanze di questi ultimi punti tra loro.

Da ciò si trae che, volendosi rilevare con una certa approssimazio-

ne il disegno di una spiaggia, di un ponte ec. stando su di un naviglio; la bussola da le distanze angolari fra le prominenze ed altri oggetti principali situati lungo la costa. Il loche, che è quel pezzo di legno affidato ad una cordellina e che serve per misurare la velocità delle navi, farà conoscere il cammino percorso dal naviglio fra due osservazioni delle distanze angolari de' punti medesimi; il cammino porcorso serve di base e la bussola ne determina la direzione. Passando da uno schizzo alla pianta effettiva e formando all' estremità della base gli angoli rilevati, le intersezioni delle linee tirate da queste estremità determineranno la posizione de' punti osservati. Orientata con la bussola la base anzidetta, è meglio operare col sestante atteso i movimenti della nave.

82. Nel rilevare le piante di diversi terreni, può spesso accadere doversi *configurare con maggiore approssimazione una parte di perimetro curvilineo*. Sia questo ACB (*fig.* 66).

Adoprando la plancetta, si rilevi la sottesa AB e, facendo stazione in diversi punti del suo allineamento, si eseguino le battute a' principali punti di tal perimetro (§. 51) per determinare la stessa.

Se le battute riuscissero troppo lunghe o la AB non fosse tutta accessibile, si potranno riferire con diverse battute a dritta ed a sinistra ad una retta BD che interseghi il perimetro medesimo o ad un altro EF che lo tocchi in un punto C, alle due linee AC, BC, ovvero finalmente ad un qualunque allineamento GH fuori del dato perimetro, secondo più tornerà conto, mentre sempre i piedi delle perpendicolari indicheranno de' punti dell'andamento cercato.

Con la squadra, potrà eseguirsi tale operazione ed ottenersi la cennata configurazione, mediante uno schizzo, determinata però prima la posizione delle direttrici.

Operando con la bussola o con qualunque strumento misuratore di angoli, potrebbesi pure ciò ottenere, bastando solo avvertire esservi il vantaggio che le perpendicolari anzidette si muterebbero in linee comunque inclinate alle direttrici o linee a percorrersi. In qualunque modo si otterrebbe sempre la configurazione del dato perimetro curvilineo, o meglio la porzione di poligono iscritto nel medesimo, mentre l' effettivo perimetro non potrebbe precisamente ottenersi e l' altronde non gioverebbe per le pratiche agrimensorie.

Quanto in questo problema si è esposto, sarebbe sufficiente per ciò che riguarda la planimetria; ma non l'è superfluo certamente scendere alla considerazione di alcuni casi speciali coi seguenti problemi.

PROBL. II.

83. *Rilevare l' andamento di una strada.*

Se la strada sia limitata da muri, vale a dire che sia inaccessibile esternamente, come una strada di Città, allora operando con la plancetta, sia AB (*fig. 67*) la strada a rilevarsi. Si pianti la plancetta in A ed orientata la stessa ed orizzontata convenevolmente, come debbe farsi in ogni stazione, si traguardino i principali punti a, b, c, d del contorno della strada, ma scelti in modo che i raggi Aa, Ab, Ac, Ad non sieno molto inclinati ad angolo acuto con la direzione delle adiacenti mura, si traguardi pure un altro punto A', quanto più è possibile nell' asse stradale ed in modo che, dovendo in questo farsi la seconda stazione, si trovi così piazzato rispetto ai punti a, b, c, d come ad un dipresso si trova il punto A rispetto a' medesimi. Eseguite le misure delle Aa, Ab, AA', Ac, Ad, si passi l' istrumento in A', attaccandosi in A, ove siesi rimasta una palina. In tale stazione si operi similmente, progredendo cioè innanzi e misurando le $A'e$, $A'f$, $A'g$, $A'h$ per ottenere altri punti interessanti del contorno cercato e, f, g, h, e con la visuale A' A'' e misura di questa, si prepari la terza stazione A'', come si è fatto per A' e così in seguito, facendo stazione in A''.

Sarebbe più regolare, impiegandovi alquanto più di tempo, per operare con esattezza maggiore, di verificare, stando in A', i punti del contorno rilevati da A, od almeno alcuni solamente di questi visibili da A' per mezzo d' intersezioni come i punti b, c, d, dirigendovi da tale stazione le $A'b$, $A'c$, $A'd$, e similmente stando in A'' verificare i punti e, f, g, h, mediante le visuali $A''e$, $A''f$, $A''g$, $A''h$ e così in ogni stazione. Avvertasi che, presso l' imboccatura delle strade trasversali o vicoli non bisognerà mai far mancare una stazione, come A''' nella strada principale per poter dalla stessa dirigere una visuale $A'''C$ in alcuna di esse strade secondarie onde marcarvi un punto C di stazione e poter in seguito

ottenersi il loro rilievo con certezza di averne ben determinato l'attacco con la strada principale.

Con metodo del tutto simile potrebbe operarsi, facendo uso della bussola, del pantometro o d'altro simile strumento, o finalmente della squadra unita però ad uno de' precedenti, mentre così com'è evidente non si otterrebbe in fine dell'operazione che un semplice schizzo da mettersi poi in proporzione, però il tempo che deve spendersi di più a tavolino l'è compensato col più sollecito operare sopra luogo.

Si possono per tal modo prontamente rilevar le strade con somma facilità e precisione. Ne' vicoli tali strumenti si rendono quasi indispensabili.

Nelle strade non murate, che per lo più, a differenza di quelle di Città, sogliono essere di uniforme larghezza, è chiaro che basta ottenere il rilievo delle sole direttrici che si trovino sull' asse stradale, mentre pel resto, basta che sia nota la costante larghezza della strada e siensi con i precedenti metodi rilevati que' punti del contorno che non sieno in alcun sito equidistanti dall' asse medesimo, che si sarà facilmente e con massima prontezza ottenuto l'andamento cercato o meglio lo schizzo di questo, da riportarsi in proporzione. Per tali strade non mancano mai segnali fissi negli adiacenti terreni, ed a questi dalle diverse stazioni è regolare dirigere alcuna misura per meglio assicurarsi della rilevata direzione dell' asse stradale.

Sarebbe in tal caso indicato l'uso della bussola o del pantometro, ed essendo lunghi molto i tratti delle direttrici, sarebbe da preferirsi la stadia od altro telegometrico strumento.

Si potrebbe anche percorrere un lato della strada e con gli esposti metodi del pari ottenere l'andamento cercato, rilevando quelli del lato di contro dalle stazioni medesime ed a semplici intersezioni od a stazioni centrali, ne' siti ove i medesimi non sieno equidistanti da quelli del lato che si percorre.

Nelle strade murate, quantunque non potrebbesi sempre piantar l'istrumento perfettamente sul contorno, si può pure così operare, piazzandolo sempre ad una piccola e costante distanza dal medesimo.

PROBL. III.

84. *Rilevare l' andamento di un fiume.*

Sia a doversi rilevare un tratto di fiume AB (*fig. 68*). Si faccia stazione in a, operando sopra una delle sponde, p. e. con la *plancetta*, si traguardi l' altro punto di stazione b che si segni sulla stessa con un picchetto e senza muovere l' istrumento si traguardi pure un' altro punto m sull' orlo dell' opposta sponda e distinto con un arboscello, una pietra un qualunque segnale fisso, marcando però una palina in a' ove la visuale am incontra l'orlo della sponda sulla quale si sta operando. Si misurino le ab, aa', e, facendo stazione in b, attaccando alla palina a, si traguardi un punto c, che l' operatore sceglierà per terza stazione, non che un altro m' e 'l precedente m, segnando del pari con de'picchetti i punti b', b'', c; similmente, dopo eseguite le misure delle bb', bb'', bc, si passi ad operare nello stesso modo in c, attaccandosi al picchetto in b per determinare i punti m', c', c'' del contorno cercato, l'altro d di una quarta stazione, e per dirigere la visuale cm'' ad altro punto dell'opposta sponda. È chiaro che proseguendo in tal modo i punti a', b', b'', c', c'' ec., determinati a *stazione centrale*, apparterranno alla sponda accessibile, e gli altri m, m', m'' ec., determinati per *intersezioni*, marcheranno la sponda opposta: si tirino prima i principali raggi e le visuali che determinano i punti di riscontro onde correggere con facilità, traguardando i medesimi, alcuna piccola alterazione dello specchio dopo l' orientazione; ed è pur chiara l' applicazione di questo metodo con diversi strumenti dopo l' esposto in questa parte.

È giovevole però contentarsi dello schizzo, operando con la bussola, pantometro o con un goniometro qualunque.

Volendo poi far uso della stadia o del telegometro, converrà che nell' opposta sponda siavi un aiutante che possa percorrerne il ciglione con la *mira a stadia* o con lo *scopo* ed allora, operando a stazioni centrali, da alcune stazioni come x, y ec. rilevati sopra una delle sponde, bastava osservare la mira piantata ne' successivi punti n, n', n'', n''' ec. nella sponda opposta per ottenere sulla tavoletta il rilievo de' medesimi, e per ottener gli altri e, e', e'', e''' ec., bastavano le misure delle ee', ee'' ec. e la misura delle ef, fg ec.

Si avrebbe così l' effettivo disegno dell' andamento del fiume, rivo, strada inaccessibile perchè pantanosa, ec.

Se il fiume fosse difeso da argini, banche ec., che pure si dovessero rappresentare in tavoletta, o se le golene fossero molto spaziose, si rileverebbe del pari l'alveo del fiume puranche.

Sarà troppo facile, dopo quanto veniam di dire, di rilevare qualunque, complicato che sia, andamento di strade e di fiumi o l'insieme di fiumi e strade; avvertendo sempre di procurarsi quanto più sia possibile de' punti di riscontro, condurre raggi e sottese, cercando di concatenare le primitive alle secondarie stazioni con misure esatte delle loro distanze, fare un segno qualunque alle piante scelte per segnali, onde non averle a disperdere.

Sarà meglio rilevare il maggior numero di punti per determinare esattamente tutte le più leggiere inflessioni degli andamenti, non omettendone alcuna. Si ricorda che le visuali dirette a' diversi segnali non abbiano a fare angoli troppo acuti tra loro, quantunque ciò potrebbe ovviarsi o determinandone le loro direzioni, quando non potessero cambiarsi, pel complemento de' loro angoli acuti medesimi, ovvero riferendo le stesse ad altre linee già tirate sul foglio con le quali l' angolo sarebbe meno acuto, si avverta di non far confusione negli schizzi, di segnarli chiari, onde non equivocare, di accompagnare questi sempre con un registro, e distinguer bene i raggi che danno i punti d' intersezioni, le visuali e le sottese.

Co' punti di riscontro il geometra si accorgerà di leggieri ove sia l' errore; mentre se nelle antecedenti stazioni abbia verificati esatti detti punti, sarà certamente fallace l' ultimo cui si è attaccato o quello della stazione in cui si scorge lo sbaglio.

85. *Rilevare un villaggio.*

Sia a rilevarsi la pianta del villaggio indicato dalla figura 69. Si circoscriva allo stesso il poligono ABCDEFG, badando che i vertici di esso sieno talmente prescelti che da essi possano scorgersi i principali punti del villaggio medesimo così, stando in A per rilevare il punto B, si dirigga una visuale al picchetto in *a*, presso l'imboccatura della strada *af* ed altro in *b*, si otterrà così il rilievo di tali punti. Stando in B per rilevare C, si rilevi il

punto *c*. Stando in C_1 si rilevi *d*, *e*; stando in D, si riscontri *d* e si rilevi l' altro E dal quale si procuri il rilievo de'punti *g* ed F; stazionando in F si rilevi G ed *h*, e finalmente in G si rilevi *f* e si riscontri A. Non si trascuri però di attaccarsi a qualche punto fisso fuori tal perimetro come, stando in F all' albero in H e stazionando in B all' angolo di cappella L. Fatto ciò ed avutosi l' esatto rilievo de' punti principali *a*, *b*, c, *d*, *f*, *g*, *h*, non che delle direttrici A*a*, A*b*, B*c*, C*d*, D*d*, E*g*, F*h*, G*f*, e delle linee AB, BC*e* del poligono e delle altre direttrici come *af*, *fh*, *fe*, *hg*, *gm*, *me*, ec. che si possono rilevare col solo collegamento de' detti punti principali, sarà facile ottenere il rilievo del villaggio, riferendo i diversi punti principali delle piazze, delle strade, degli angoli degli edificii ec. (*prob. prec.*) alle dette direttrici. Ripeto si procuri nel rilevare il poligono principale di riferire alcun vertice di esso a qualche segnale naturale nell'adiacente campagna, come ad un albero, ad un oratorio ec., mentre questi saranno d' appoggio pel rilievo della campagna medesima.

Ma dovendosi levare la pianta di un villaggio esclusivamente, o quella di un paese del tutto contornato da muri o fossate, s' incomincerà dal centro, diramando sino al di fuori le misure; nel caso in esame sarebbe stato opportuno scegliere per stazione centrale il punto *e* della piazza nel mezzo del Paese, progredendo per quelle stesse contrade la di cui misura ha servito di base alle fatte operazioni, riscontrandosi quindi al di fuori per chiudere de' perimetri. La ragione si è che qualunque piccolo errore accaduto nella formazione de' perimetri verrebbe ad essere ridotto nell' esterno.

Per disegnare l' interno delle fabbriche, vi si entrerà con le canne o nastro graduato e per mezzo di perpendicolari e piccole intersecazioni, partendo sempre da punti marcati al di fuori, si otterrà lo scopo.

PROBL. IV.

86. *Rilevare più pezzi di considerevole estensione di bosco appartenenti a diversi proprietarii.*

L' è ozioso ripetere qui quanto si è detto parlando del rilievo delle piante di diversi terreni. Daremo solo degli schiarimenti generali. È irregolare l' un dopo l' altro eseguire il rilievo delle diverse possessioni, si opererà facilmente rinvenendo i punti di riscontro, un piccolo errore vien portato successivamente negli altri pezzi e può produrre una calcolabile inesattezza ben difficile a correggersi senza rifare interamente l' operazione. Debbo aversi cognizione dell' intera operazione.

Nel segnare il perimetro, vi si marchino i punti d' imboccatura di diversi viali, quelli d' incontro con le linee di divisione a rilevarsi, ed allora, così determinato il travaglio, si compirà molto facilmente il lavoro, attaccandosi alle già fissate secondarie stazioni per determinare le linee partitrici delle differenti proprietà.

Senza battere per intero l' andamento del bosco, basta prima ottenerne una buona chiusa affinchè, se questa non sarà per risultare esatta, non si sarà perduto molto tempo, attaccandosi a' punti stabiliti nel perimetro al quale potran darsi senza tema di equivocare quante battute ne piaccia per fissarlo completamente.

Se il permetterà lo stato topografico del terreno, si renderà meno meccanica, più certa e spedita l' operazione, *fissando solamente punti* invece di *formare perimetri.*

Il geometra, che ha in tal caso bisogno di fino raziocinio, non considererà se non in ultimo luogo, che debbe levar l' andamento di viali, strade, sentieri, acque, linee di divisioni ec.

Si affiderà soltanto al riscontro de' punti fissi, dalla sua sagacia primamente prescelti, guarderà egli al grande dell' operazione, per modo che dopo poche stazioni avrà già fissati sul foglio tanti punti verificati; cioè una gran base inalterabile cui avrà intima relazione il rimanente del lavoro cioè il rilievo delle linee partitrici ec., attaccandosi sempre a punti fissi.

SEZIONE III.

Differenze che possono incontrarsi operando, modo di prevenirle e come corriggerle.

87. Nelle grandi operazioni di plancetta non è così meccanico l'operare come nelle piccole, ripetendo sempre le medesime operazioni allor quando occorra travagliare in simili situazioni e particolarmente misurando a perimetri, poichè i meno pratici non fanno che percorrere degli andamenti al solo oggetto di chiudere spazio, e così con grande pazienza, perditempo e col rifare la maggior parte delle stazioni, ultimano le loro mappe, le quali abbenchè il più delle volte esatte, pure gli autori non possono esserne certi prima di una revisione perchè appunto hanno misurato meccanicamente e senza collegare con sodi raziocinii il totale dell' operazione.

Le circostanze più difficili per un geometra sono le differenze che può incontrare ne' suoi travagli, molte volte debb' egli rinvenirne la causa senza rifare nè stazioni nè misure: le sue osservazioni e le verifiche nelle stazioni antecedenti a quella in cui riscontrerà l' errore, saranno i dati su cui dovrà fondare i suoi ragonamenti. Soventi conviene proseguire ciò non ostante le misure, onde vedere il risultato delle visuali ai medesimi punti in direzioni diverse, e da ciò dedurre con maggior sicurezza la causa dello sbaglio già incontrato.

Egli è indubitato che il rintracciare l'origine di tali differenze sia l'oggetto più delicato e più importante per qualunque esperto geometra. S' incontrano degli errori accompagnati da circostanze tanto complicate, le quali somministrano perfino dati opposti, e che potebbero recare non lieve imbarazzo al più freddo ragionatore di questa materia.

Diverse sono le cause che producono errore, indipendentemente dall' esatezza degli strumenti e dall' orientazione e livellazione della tavoletta; possono essere sbagliate anche di poche parti più misure, per la poca attenzione degli uomini misuratori e che i raggi situati nella medesima direzione producono errori di canne. Accade di essere stata riportata malamente su' raggi qualche misura anche dal meccanismo del compasso e della scala, se non si usa la dovuta attenzione, ne possono derivare nel corso di

più misure, alterazioni pure incompatibili. Succede di aver potuto prendere un raggio per un altro, o pure di aver condotto il raggio, col quale si fissa sulla carta una stazione, da un punto in tavoletta non rappresentante sul terreno quello da cui è stata staccata la misura. Spesso alcuni segnali non posti perpendicolarmente moltiplicano pure le cause per un cattivo risultato, e ciò avviene se i raggi che li hanno determinati sieno stati diretti al loro piede, mentre in seguito si scuopre solamente la vetta o viceversa. Gli aghi medesimi per troppa grossezza aumentano le insensibili differenze sino a renderle dall' accorto agrimensore calcolabili; avviene che dal punto della tavoletta osservando un segnale qualunque vi si riscontra piccola differenza: all'incontro, ponendo l' ago nel punto indicante il segnale medesimo e, traguardando, esatto ne risulta quello equivalente alla posizione di tavoletta. Queste circostanze devono attrarre l' attenzione dell' osservatore, poichè aumentano i dati nel rinvenire le cause degli errori, e fanno conoscere ancora quali sieno le differenze di cui non debbasi far conto.

All' avveduto e diligente geometra incombe di togliere tante cagioni all'alterazione de' suoi travagli.

Cercherò di esporre alcuni de' più frequenti incontri, che si danno in campagna, onde accennare i mezzi fondamentali di conoscere, con l' aiuto dell' esperienza, l' origine di errori anche complicatissimi, non potendosi di questi chiaramente parlare che sopra luogo.

Rappresenti la figura 70 i raggi condotti nella formazione di un perimetro. Da a siano state fissate le paline a', a'', la casa A, e condotta una visuale pq ad un angolo della D; stando in b, la palina b', la casa B, e riscontrata esatta la A; dalla posizione c misurata la C. In d sia l' ultima stazione, con la quale debba esser chiuso il perimetro. Marcato il punto d abbiasi cura di subito traguardare la palina a'', e venga riscontrata esatta: misurisi la casa D, e l' angolo traguardato cada esattamente su la visuale segnatavi. Con questi confronti potrebbe il geometra persuadersi di aver bene operato, e perciò nessun dubbio per la chiusa del perimetro. Ciò non ostante, alzata una canna perpendicolarmente alla palina a' che viene supposta in situazione piuttosto bassa, ed indirizzatovi il cannocchiale si ritrovi invece che la visuale cada nella direzione dx: questo risultato ina-

spettato recherà sorpresa nè si trascuri osservare nuovamente il punto a'', e rifare la misura dD, onde vedere se fosse intervenuto qualche equivoco ne' confronti prima ottenuti; ma tutto riscontrando ugualmente, si rifaccia ancora la dC e sia pure esatta; la distanza dd' sulla tavoletta corrisponda alla dd' sul terreno, e così la aa'. Non potendo ancora comprendere quale sia la causa dello sbaglio incontrato, si osservi di nuovo l'ago magnetico, se la tavoletta sia bene livellata la diottra rettificata, e tutto sia a dovere.

Per ritrovare l' errore si figga l' ago in a', da dove condotto il raggio, e riportatavi la misura, ne risulterà il punto y, indicante in carta il punto d sul terreno. Coo l' ago in y si osservi d'', segnando il tratto di raggio mn, il quale passa tanto pel punto y che per d, traguardando ora la casa D, verrà sulla carta situata in X è frattanto la visuale pq condotta da a sarà tagliata pure precisamente sotto quel medesimo angolo. Tutto fa conoscere che il punto d combinava bensì per le direzioni mn pq che in sostanza è una sola per essere prossimamente parallele, non già per le dd', dC: ciò significa che l'errore è sulla linea mn. La casa C verrà situata in Y. Dunque i punti reali sul foglio saranno d', y, X, Y. Da b è stata riscontrata esatta la casa A, cioè a dire non errata la direzione bA: la direzione mn è stata pure ritrovata giusta, dunque il punto b è esatto, come lo sarà ancora b', poichè se la misura bb' dovesse essere minore, per esempio in b'', la casa Y verrebbe situata al di sotto dei primi raggi: se invece si voglia più lunga, per esempio in b''', Y risulterebbe al di sopra della presente sua posizione, il che nè pure può essere, poichè per fissarla siamo partiti dal punto d', la cui situazione è infallibile, nè corrisponderebbe con tal supposizione la misura e direzione yY già verificata. Non potendo perciò essere errata la misura bb', non lo sarà neanche la CC, giacchè trasportata quest' ultima sopra il reale è corrispondente raggio Yz, parallelo al cC se vogliasi supporre maggiore o minore, cioè che il punto z dovesse cadere in z' o pure in z'', allora più non combinerebbe il punto b' che è stato dimostrato esatto. Sarà dunque sbagliata la misura $b'c$, che sul terreno deve corrispondere alla distanza bz' in tavoletta, e verrà riscontrata col fatto. Quest' errore è il solo accaduto, come vien provato dalla stessa direzione zb', che passa esattissimamente pel punto c

in carta. Per meglio persuadersene si sovrapponga la tavoletta in c, e conducendo i raggi dai punti Y, b', vedremo che l'intersecazione si farà precisamente in z, siccome doveva accadere.

Il parallellismo dei raggi $a'y$, yX, Yz, co' loro omologhi dx, dD, dC, Cc, fa chiaramente conoscere di aver sempre conservata la stessa direzione, come vien confermato dal coincidere il raggio zb' col cb'.

Vedesi quanto sia necessario marcare leggiermente i raggi ed i segni che distinguono le stazioni dalle paline, per non rendere confuso ed impulito il disegno in caso di correzione.

Con le stazioni a, b, c, d, e, f, (*fig.* 71) sia stato chiuso perfettamente un perimetro in a', nella formazione del quale da c siasi riscontrata esatta la casa B; da e le D, E, A, B e palina in a; da f finalmente la sola casa A, volendo ora dimezzare questo perimetro, si stazioni in g, quindi in Z per confrontare la casa C; frattanto che dai tira-catena vengano eseguite le misure, si conducano i raggi da g' e da C, il primo dei quali prenda la direzione in Z, l'altro verso h: la distanza che risulta tra questi due raggi farà tosto conoscere al geometra esservi errore; ma da g sono state trovate esatte le paline e', e, d, a', non che le case E, A, perciò di quella stazione non evvi a dubitare. Si trasporti sul corrispondente raggio la misura g'Z, fissando così il punto Z, ma sia stata prima verificata la gg'; da Z, traguardando in E, B, f, C, i primi tre punti combinino esattamente, non già il quarto C; all'incontro, attaccandosi alla casa C ne risulta sul raggio Ch la distanza di Cz, e posto l'ago in z vi si aggiri la diottra per osservare i punti visibili, nei quali vengano riscontrate rilevanti differenze. Bisogna conchiudere adunque, che la posizione della casa C in tavoletta sia falsa, ad onta che la distanza ZC corrisponda a quella sul terreno. Ma come ciò accade mentre nella formazione del perimetro sonosi avuti sufficienti riscontri, la chiusa esatta, nè verun dubbio sulla posizione g? rifacendo la misura bC sia corrispondente. Tentiamo di scoprire l'errore, misurando da C in B, e ne risulti in fatti la misura sul terreno minore della CB in carta, e servendoci del punto Z pel rappresentante la stazione, la casa C verrà trasportata nel foglio sul raggio ZC' in C ed allora la distanza C'B combini con l'equivalente misura ritrovata sul terreno; tutto questo conferma che in tavoletta la casa C

non era ben situata, e per conseguenza ancora la posizione b_1 nella quale non si aveva avuto vemo riscootro.

Come dunque era stato confrootato tutto esatto, mentre debb'essere pur falso il punto b'? andiamone io ricerca. Si soprappooga lo strumeoto al puoto b_1 che determinato sul foglio, conducendo il raggio da C' verrà a corrispondere in X, ma nello stesso raggio $a''b$, dunque era errata la distanza $a''b$ come io effetto si riscootrerà sul terreno e che dovrà essere invece rappresentata dalla a''X. Da X aduoque, punto reale sulla tavoletta e che figura il b sul terreoo, si conduca il raggio XY, traguardando la palina b', per cui il punto b' in carta verrà trasportato io Y, risultando nella direzione della visuale cb'; per conseguenza la distanza cb' era pure errata, come potrà essere verificata. Ma iotanto si nsserva, che quest' ultima differenza Yb' è nguale all'altra bX, nel mentre che la prima è in più, la seconda in meno; si rifletterà nel medesimo tempo che ambedue i raggi cb', ba'' sono nella stessa direzione, e perciò compensatisi questi due errori scambievolmeote, la differeoza cadeva nei soli tre punti b, b', C, meotre li c, a'' erano esatti. Tale impreveduto equivoco era sfuggito al geometra nella formazione del perimetro per maocanza di mezzi onde verificare la stazione b, e che nel compenso dei due errori non era stato riscontrato in appresso.

Simili compensi possono succedere dopo più stazioni, abbenchè rettificate le posizioni intermedie: ciò avviene perchè i punti di riscontro sono nella medesima direzione dell'errore, od almeno in direzione molto prossima che perciò non sempre si può al momento cooosrere, maocando il soccorso di altri punti, i quali con visuali ad angoli soddisfacenti possono dimostrarlo.

Nella (*fig.* 72) immaginasi incominciato un perimetro con le stazioni a, b, dalle quali siano stati marcati i punti A, B, C, D, dà a condotta una visuale in D, riscootrata quiodi esatta dalla stazione b e da quest' ultima corrispondano pur anche la casa A e pianta B. Stando in c, dopo di aver eseguita la misura $b'c$, si osservi B ed il lembo della riga cada invece nella direziooe tu: traguardando ugualmeote con l'ago in B, e condotto in c un tratto di raggio rs, venga riscontrata la medesima differenza, che per essere di pochissime parti, nè avendo altri punti co' quali rettificarla, si proseguirà non ostante l'operazione, fissando una palina c' riserbandosi di fare ulteriori osservazioni. Portata infatti la ta-

voletta in d se ne fissi sulla carta la posizione con l' eseguire la misura $c' d$ ed osservando i punti B, C vi s' incontrino le differenze indicate dai raggi m, n; ma frattanto questi raggi s' intersechino in Z nel qual punto posto l' ago traguardando, vengano riscontrati esatti tutti gli altri visibili. Dunque il punto Z debb'essere quello rappresentante il d sul terreno.

Di ciò assicurato il geometra dalle osservazioni fatte in questa stazione, nè volendo indagare per ora la causa di quanto è accaduto, trasporti il punto c' in Y sul raggio ZY segnato nel traguardare con l'ago in Z, la palina c' sul terreno. Dirigendo ora da Z un raggio alla palina d', parta da quest' ultima la misura per la stazione c, dalla quale chiudasi perfettamente il perimetro con B, ed ecco confermato esatto il punto Z, Da b si sono avuti confronti sodisfacentissimi, dunque c è la stazione in cui deve essere incorso qualche errore, tanto più, che vi si è riscontrato piccolo divario, osservando B. Vadasi perciò a soprapporre la tavoletta in c, ed orientata, si rinnovi il raggio condotto dalla palina per b', e la sua direzione passi ora per X, punto in cui cade sul nuovo raggio la misura $b'c$ già ritrovata esatta: figgendo ora l'ago in X si osservi B, e la visuale ne tagli esattamente il punto marcato sul foglio; traguardando la palina c' sul terreno, ne passi il raggio pel punto Y in carta. Dunque il punto X è il reale, che rappresenta in tavoletta la situazione c sul terreno. Ma come può essere intervenuto quest' errore mentre le misure $b'c$, cc' erano esatte?

La stessa direzione obbliqua degli ultimi raggi rapporto ai primi condotti da c, indica bastantemente, che lo sbaglio era provenuto da cattiva livellazione, od orientazione della tavoletta, obbliquità però, che riscontrasi, nei soli raggi tirati da quella stazione, mentre il terzo $c'd$ è parallelo al reale YZ, giacchè operando dopo essersi attaccato ad un punto inesatto, tutt' i raggi portano con se il medesimo errore, quando non succedono altri inconvenienti, convertendolo secondo le diverse situazioni ora in direzione ed ora in misura: tali raggi però saranno sempre paralleli a quelli corrispondentemente segnati nel rifare le diverse stazioni.

Questo esempio da bastantemente a conoscere qual conto debba farsi delle piccole differenze, purchè queste non vengano provate per tutte le direzioni tollerabili, ed assicurandosi, che lo strumento sia ben situato.

Da quanto è stato detto ognuno comprenderà quale triste effetto producano anche tenuissime alterazioni nelle misure che dalla sola negligenza degli uomini misuratori dipendono, non trattandosi, che di poche parti. Si è potuto conoscere ancor meglio, che uno sbaglio di misura produce in seguito nelle stazioni errori ora in direzione, ora in misura secondo le varie posizioni, ebe prendono i diversi raggi, relativamente ai punti fissi che si vanno osservando. Di più abbiamo veduto come si trasportano i punti per mezzo del parallelismo dei raggi, e con ciò viene risparmiato di rifare delle stazioni: ma si guardi dal produrvi deviazione, che eagionerebbe nuovi inconvenienti. Una stazione in cui suceeda deviazione devesi necessariamente fare di nuovo, quando cbe non vengano determinati da altre posizioni i punti reali cbe quella stessa dovrebbe rappresentare. L' esposto fin qui c' insegna, cbe ritrovando piccole differenze tra il punto di stazione fissato dall' intersecazione, e quello determinato dalla misura devesi sempre attenere al primo, purchè l' intersecazione sia fatta con le dovute precauzioni; che se vi accada qualche dubbio, verrà proseguita l' operazione conducendo raggi, e visuali (ma con somma pulizia e diligenza) da ambi i punti, cioè dal risultante della misura e dall' altro marcato con l' intersecazione, servendosi quindi dci raggi, e delle visuali dipendenti da quello, ehe con fondamento si è dovuto giudicare esatto.

Situata la tavoletta in una posizione X (*fig.* 73) vi si voglia determinare questo punto con l' aiuto dei già segnati ABCDEF. Posto l' ago nella casa A si traguardi conducendo il tratto di raggio *mn* da intersecarsi con un secondo *op* appoggiato alla pianta F. il punto A debba essere adunque il rappresentante X sul terreno. Ora per meglio assieurare questa intersecazione, abbencbè succeda prossimamente ad angolo retto, tirisi dal punto D un altro raggio il quale invece di passare per *a* cada nella direzione *rq*, tagliando i due primi in *b*,*c*; perciò tanto il punto *a* cbe i due *b*,*c* potrebbero indicare nel foglio il punto X sul terreno. Si osservi di nuovo l' ago magnetico se il cannocchiale sia nella sua direzione, e la tavoletta livellata: tutto sia in ordine. Conducendo delle visuali dagli altri punti fissi, eadano tutte nel triangolctto *abc* nel quale per eonseguenza l' errore viene tutto racchiuso, e vi deve esser contenuto ancor il

punto ricercato. Ma intanto verun dubbio può cadere sui punti di riscontro, poichè furon provati esatti e questa discordanza tra loro dipenderà da una piccola alterazione nella carta. Dove dunque fissare il punto X in tavoletta? siccome tutto lo sbaglio vien compreso nel triangoletto *abc* così vi si sceglierà il punto x di mezzo, compartendo in tal modo per ogni direzione le piccole differenze incontrate. Infatti se da x, che figura il punto X sul terreno, si traguarderannno tutti i punti fissi, le visuali *yz de*, *gf*, *vu*, *ih*, *st*, indicheranno l'esattezza del punto x, poichè queste, o cadono sui punti cui sono diretti, o ne fanno conoscere incalcolabili le sconvenienze; dunque si è stimato bene, che il punto x rappresenti la posizione X sul terreno. Ricorrere non deve però il geometra a questi ripieghi che nel caso in cui le differenze tra le intersegazioni dimostrano una tollerabile dissonanza di punti fissi tra loro. Che se lo spazio racchiuso dai diversi raggi, nel quale sono per conseguenza compresi tutti gli errori, fosse di qualche estensione, allora bisognerebbe rintracciarne, per togliere la causa diretta, poichè prendendo il punto di mezzo ne verrebbero ciò non ostante sbagli rimarchevoli.

Si osservi di non porre l'ago in un angolo di casa e traguardarne invece un altro; fa d'uopo assicurarsi, che le visuali tirate nel foglio siano appoggiate ai corrispondenti punti traguardati sul terreno. Succede ancora, che a causa di alcune correzioni, o piccoli trasporti dei punti in lapis sulla carta, prender si possano i falsi pe' reali non avendo fatto sparire diligentemente i primi con gomma elastica. Sopratutto è necessario moltissima precisione nel segnare le visuali, o tratti di raggio, onde francamente ragionare sui loro rapporti.

Abbiansi nel foglio scoverto in tavoletta i punti U, V, X, Y, Z (*fig.* 74) appoggiato ai quali voglia il geometra progredire l'operazione. In effetto partendo con le misure da Z, stazioni successivamente in a, b', c', e'; da a riscontri esatta la casa Y, da b' la X, e da queste due stazioni intersechi il segnale S. Stando in d' incontri con una visuale r' s' la pq, già diretta nelle operazioni antecedenti ad un angolo della casa T, ed il punto d'intersecazione succeda in T', sulla carta; da e' figga l'ago in V, e traguardando quella pianta cada la visuale nella direzione *tu*, non già in e' come dovrebbe, e molto più per avere avuto dei dati sufficienti onde credere sin qui il travaglio

ben eseguito ; di più traguardando da questa stazione , e misurando la casa U, venga invece a cadere in U', e perciò la chiusa della prima a questa seconda operazione inesatta.

Or per ricercare l'origine dell'errore, si parta con le misure da U , onde riandare per via opposta tutte le stazioni. In tal guisa la prima stazione verrà nella carta a cadere in *e* ; e per conseguenza vi si riscontrerà bene la pianta V, e la casa C' sarà trasportata in C ; ponendo l'ago in C per appoggiarvi il raggio , il segno di stazione *d'* cadrà in *d* , la casa D' in D , e la pianta B' in B. Rifacendo quindi la posizione *c'* venga questa ad essere rappresentata sulla carta in *c* ed A' in A; la divergenza dei raggi con qnelli condotti antecedentemente fa conoscere abbastanza , che nella corrispondente stazione fatta prima era accaduta una deviazione , per non aver forse situato con la dovuta diligenza lo strumento. Attaccandosi ad A venga il punto della stazione *b'* a cadere in *b* , ciò non ostante si riscontri esatta la casa X : parimente la visuale condotta al segnale S cada nella medesima direzione *no* , e perciò nessun cambiamento nella situazione rappresentata in tavoletta dal punto S: ciò significa che *b* , *b'*, S sono nella medesima linea, e che le visuali in X formano un angolo tanto acuto , che quasi insensibile ne riesce la loro inclinazione ; conducendo da *b* il raggio alla palina *a'* , e presane la distanza , venga essa trasferita in *a''* su lo stesso raggio *aa'* ; questo fa conoscere , che la misura *aa'* era errata , come meglio potrà il geometra persuadersene rifacendola , e così sarà inutile sovrapporre la tavoletta in *a*. Dunque l'errore dipendeva da uno sbaglio di misura intervenuto nella *aa'* , e da deviazione nella stazione *c'* rappresentata ora dalla reale *c*. La casa T sul terreno verrà per la fatta correzione segnata in T sulla carta , conducendo da *d* il raggio *rs* parallelo al primo *r's'* direttovi dalla falsa posizione *d'*.

Per verificare di nuovo molti de' fissati punti , e vedere la loro relazione co' primi, si porti la tavoletta nell'altura *b* , partendo con la misura da S , e così sarà confrontata ancora l'intersecazione di quel segnale che viene snpposto interessantissimo per le divisioni dei terreni.

Trascurando piccolissime differenze , è necessario rammentarle in occasione di riscontrare quei medesimi pnnti poichè può darsi il caso , che nella stazione dalla quale vengono

traguardati, sia pure incorso trascurabile errore, ma in direzione contraria di quello esistente nel punto, che si osserva, per cui potrebbe apparire rilevante, nel mentre che in sostanza fosse poi tollerabile. Sarebbe per conseguenza necessario togliere anche le incalcolabili differenze.

Immaginasi nella (*fig.* 75) di voler fissare i punti A,B,C,D, E,F,G,H,I,L. Situata primieramente la tavoletta in *a* si misuri in A,B,C,D, cadendo D in D′ e si dirigano delle visuali alle case L, E; da *b*, che in tavoletta verrà rappresentato in *b*′, si fissino le case E,G, che nel foglio risulteranno in E′,G′, ed il segnale F in F′: da questa stazione oltre di avere verificata esatta la casa A, e la visuale *pq* sarà stata diretta alla pianta H la *r*′ *s*′. Si passi in *c*, e partendo con la misura da A verrà rettificata questa posizione, osservando la casa G marcata in G′ è fissato il segnale I; inoltre traguardando in H s' interseehi con un raggio *tu* il raggio *r*′*s*′, ed il punto d' intersecazione succeda in H′. Portata quindi la tavoletta in *d* ne venga in *d*′ segnato sulla carta il punto di stazione, e misurata la casa L cada in L′, non riscontrando perciò esattamente la direzione del tratto di raggio *il* condottuvi da *a*; traguardata la pianta in H′, combini. Ora per ricercare da dove avvenga lo sbaglio ritrovato in L′ si rifaccia la misura I*d* sul terreno, e non ritrovandola come prima, venga sulla tavoletta ad essere trasportato in *d* il punto *d*′ e la casa segnata L′ in L, e così il raggio *il* ne intersecherà esattamente l' angolo da *a* traguardato; ponendo l' ago tanto in *d*′ che in *d* si è poi sempre ritrovata esatta l' intersecazione in H′ per la piccolezza dell' angolo formato dalle due visuali.

Dopo questa correzione portata la tavoletta in *e* onde partire dal segnale I con la misura I*e*, e volendo riscontrare la pianta H si figga l' ago in H′, ma la visuale invece di passare per *e* prenda la direzione *mn*. Ecco un nuovo errore. Rinnovata la misura I*e*, sia riscontrata esatta; ponendo l' ago in *e* per traguardare le case A,B,L, risultino queste in giusta direzione: al contrario nelle G,D s' incontri differenza, e molto maggiore nell' ultima. Come ciò accade, mentre la stazione *b*′ è rimasta verificata con A, e con la visuale *pq*? s' incominci dal rifare le misure, ed infatti la *a*D sul terreno non corrisponda alla *a*D′ in tavoletta, ma debba il punto D′ cadere in D. Perciò trasportando parallelamente i raggi, i punti *b*′, E′,F′,G′, saranno marcati in *b*,

F,F,G ; la visuale $r's'$ diverrà rs ed il punto H′, H. Corretta così la posizione di questi punti e traguardati di nuovo da c, si riscontreranno tutti esattissimi. Vedesi, che l'errore in b' era sfuggito alle osservazioni del geometra, per essere questo punto nella medesima direzione Ab; parimente parve corrispondere la visuale pq, mentre questa intersecava in carta un angolo, che ora si osserva essere l'opposto a quello che fu realmente traguardato. Da c sembrava pure esatto il punto G′ per essere quest'ultimo nella direziouc cG; ugualmente H′, ritrovandosi sulla linea cH.

In difficili situazioni dovendo qualche volta attenersi alla sola intersecazlone, la piccola differenza che potesse essere incontrata tra il punto d'intersecazione, e quelli marcati dalle misure, se la differenza è in misura, o declinando proporzionatamente ove occorra, i raggi della stazione; onde farla del pari annichilare allorquando si converte in deviazione. Vengono così divisi tali minimi errori in modo che non producono cattivo effetto nei punti rappresentanti le stazioni cui furono addossati.

Però nel formare nuovi perimetri; o fissare altri punti, si asterrà dal partire da quelli ne' quali furono fatte le correzioni, anzi se ne richiami dal geometra tutto il valore, onde più francamente giudicare nelle operazioni susseguenti. Chiusi in questa maniera tali errori, non saranno trascinati più oltre. Guardisi dal chiudere sbagli rimarchevoli senza toglierli del tutto: ripeto ho inteso parlare di quelle differenze, che ancor trascurate in una sola misura, o stazione, nemmeno potrebbero produrre un cattivo effetto, ma che si vogliono perdere, direi quasi, negli stessi fori fatti dall'ago.

Di buon mattino avendo determinato sul foglio dei punti con ottimo risultato; più tardi le intersecazioni ad essi appoggiate ho trovato non combinare affatto co' travagli de' giorni antecedenti; è facile sciogliere questa difficoltà, giacchè l'umidità dell'aria aveva allargati i pori della carta, rinchiusi quindi dall'azione del sole. Perciò travagliando subito giorno, si avrà cura di misurare pei dettagli, non mai per operazioni fondamentali. Ho osservato che in monte le misure riescono generalmente qualche poco maggiori del vero, ad onta di tutte le cure nell'eseguirle: egli è perciò che l'esperto geometra toglie qualche parte alle lunghe misure, regolandosi co' punti di riscontro.

*

Al certo altre cause che contribuiscono agli errori dovrei qui addurre, ma dirò solo che accade spesso di non avere condotto con la dovuta attenzione le linee in lapis da un punto all'altro de'segnati con le punte del compasso ne' diversi andamenti od angoli di case. Non pochi errori produrrebbe la cattiva costruzione degli strumenti, ma di questi non parlo, supponendoli sempre esatti. È però accaduto che una lentissima deviazione dell' ago magnetico abbia portato tristissime conseguenze, abbenchè nell'operare tutto fosse ben riscontrato. Simili incontri però non avverranno ad un esperto agrimensore il quale spesso rettifichi l' ago magnetico.

Potrà conoscersi se la carta abbia sofferto ritiro, spuntando un ago dai fori dello specchio.

Tutto saprà il geometra evitare, con l' esperienza, tutto prevedendo ragionatamente.

L' egregio ingegnere *Leopoldo Gozzi* non altrimenti ragionava circa tali avvertenze.

PARTE TERZA

Dell' Agrimensura.

SEZIONE I.

Della misura delle superficie de' diversi terreni.

88. Tolto di mezzo ogni difficoltà che potea incontrarsi per le diverse operazioni sul terreno (part. 2.ª sez. 1.ª) , ne sarà ora facile avvalerci di esse onde procurarci quei dati che la geometria ci mostra bisognevoli per l' *agrimensura* , ovvero per la misura de' terreni di diverse figure , onde, come ognun vede, non ne rimane che richiamare qui le regole per le misure medesime, di che andremo ora ad occuparci (*).

Avvertasi però che , co' seguenti problemi , intendiamo sempre parlare della misura delle piante de' diversi terreni e non già dell' effettiva loro superficie.

(*) Veggasi a tal proposito il mio trattato *della misura delle figure piane e solide* con applicazioni logaritmiche. Napoli 1852.

PROBL. I.

89. *Misurare una superficie di figura quadrata o rettangolare.*

Il quadrato è la più semplice di tutte le figure e la misura si ottiene moltiplicando il numero delle unità di misure che contengonsi in un lato per se medesimo. Che però per ottenere tal misura basta conoscere un lato della figura.

Chiamando S la superficie cercata ed a il lato del quadrato si avrà $S=a^2$.

Di una figura rettangolare si può misurare la superficie, per la stessa ragione, moltiplicando il numero delle unità della base per quello delle unità dell'altezza ovvero di un lato; ond'è che per avere le unità quadrate che si contengono in un rettangolo, è necessario conoscere due lati contigui.

Chiamando dunque a e b i lati contigui del rettangolo ed indicando per S la superficie di esso, si avrà $S=ab$.

BROBL. II.

90. *Misurare l'aia di un parallelogrammo obbliquangolo.*

Poichè tal figura è uguale al rettangolo della stessa base ed altezza, basterà, per ottenerne la superficie, misurare un lato e la perpendicolare a questa, da un punto del lato opposto ed eseguir poi l'operazione come pel rettangolo (probl. prec.).

Sia h tale altezza ed a nn de' lati, dinotando con S la superficie cercata, si avrà $S=ah$.

Scol. Talvolta il terreno potrebbe opporsi alla misurazione dell'indicata perpendicolare ed allora questa potrà essere supplita dalla conoscenza dell'angolo φ che il noto lato a formi col suo contiguo b, mentre, $h=b$ sen. φ, e la misura del parallelogrammo si calcolerebbe mediante la formola $S=ab$ sen. φ.

PROBL. III.

91. *Misurare l' aia di un terreno triangolare.*

Risolveremo svariati casi dipendenti dai diversi dati che può offrire il terreno.

Cas. 1.° Conoscendo la base a e l'altezza h di un triangolo, è chiaro che, essendo questo sempre uguale alla metà del parallelogrammo della stessa base ed altezza, sarà, chiamando S la superficie ed esprimendo per a, b, c i tre lati e per A, B, C i tre angoli opposti rispettivamente a questi $S=\frac{ah}{2}$ (probl. 1.°)

Cor. Se il triangolo sia rettangolo, allora perchè $h=b$, essendo b l' altro cateto, sarà $S=\frac{ab}{2}$

Cas. 2.° Se del triangolo obbliquangolo non si possa conoscere l'altezza h, basterà aversi un de' lati b contigui alla base a e l'angolo C che con la stessa fa uno di essi; sarà (probl. 2.°)

$$S=\frac{1}{2}\,ab\ \text{sen.C}$$

Cas. 3.° Se sieno noti solamente i tre lati, e quindi la loro somma $2p$, ovvero sia noto il perimetro del triangolo, per valutare la superficie del medesimo si osservi che qui, oltre di a, si conoscono gli altri due lati b,c, invece di h, quindi per applicarsi la stessa formola $S=\frac{ah}{2}$ (cas. 1.°) è necessario sostituire in luogo di h il suo valore espresso in funzione de' lati conosciuti. A tale oggetto essendo, (Flauti Trig. §. 90)

$$h=\frac{2}{a}\sqrt{\left(p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\right)}$$

si ha $S=\frac{a}{2}\left(\frac{2}{a}\sqrt{(p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c))}\right)$, d' onde

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

val quanto dire che *l' aia di un triangolo può anche rappresentarsi per la radice quadrata del prodotto che ha per fattori la semisomma de' lati e le tre differenze di ciascun lato da questa.*

Il valore di S così espresso si calcola più facilmente coi logaritmi.

Cas. 4.° Ma se oltre di un de'lati a, altro dato non si potesse avere per la proposta ricerca, se non che i due angoli adiacenti B,C, si avrà subito il terzo D (§. 18) e quindi l' altra formola

$S=\frac{a^2 \text{ sen. A sen. B}}{2 \text{ sen. } (A+B)}$ facile del pari a calcolarsi per logaritmi. La dimostrazione l' è ben chiara, mentre, essendo

$\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}=\frac{\text{sen. B}}{\text{sen. } (A+B)}=\frac{b}{c}$, ricavando da quest' ultima equazione il valore di b e sostituendolo nella formola $S=\frac{bc}{2}$ sen. A ottenuta nel caso 2.°, risulta l' esposta espressione di S.

PROBL. IV.

92. *Trovare l'area di un quadrilatero di cui sieno note le sole diagonali e l' angolo che le stesse formano tra loro.*

Sieno a, b, c, d le date diagonali ed A uno degli angoli formati dalle medesime. Le superficie de' quattro triangoli nei quali rimarrà diviso il quadrilatero saranno le seguenti (cas. 2.° probl. 3.°).

$\frac{ab}{2}$ sen. A, $\frac{bc}{2}$ sen. A, $\frac{cd}{2}$ sen. A, $\frac{da}{2}$ sen. A, e però l' intera aia cercata

$$S=\frac{ab+bc+cd+da}{2} \text{ sen. A}=\frac{(a+c)(b+d)}{2} \text{ sen. A}$$

PROBL. V.

93. *Trovare l' area di un quadrilatero iscrittibile al cerchio e di cui sieno noti i soli quattro lati.*

Sieno dinotati con x, y, z, t i lati di tal quadrilatero e si supponga noto ed uguale a φ l' angolo che i due primi fanno tra loro. Sarà l' angolo de' rimanenti due $=90-\varphi$. Chiamando S, S' rispettivamente, le aie de' due triangoli che compongono il quadrilatero, e che hanno per base comune la diagonale che passa per gli estremi di x e di y, si ha *area del quadrilatero dato*

$$S+S'=\frac{xy}{2} \text{ sen. } \varphi+\frac{zt}{2} \text{ sen.} (90-\varphi)=\frac{xy+zt}{2} \text{ sen. } \varphi$$

Gli stessi triangoli danno le seguenti relazioni, chiamando m la comun base, $m^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos.\varphi$, $m^2 = z^2 + t^2 + 2zt \cos.\varphi$ d' onde si trae

$$\cos.\varphi = \frac{x^2+y^2-z^2-t^2}{2(xy+zt)} \text{ e sen. } \varphi = \sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2-z^2-t^2}{2(xy+zt)}\right)^2} \text{ e però}$$

$$S+S' = \tfrac{1}{4}\sqrt{4(xy+zt)^2-(x^2+y^2-z^2-t^2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\Big((x+y)^2-(z-t)^2\Big)\Big((z+t)^2-(x-y)^2\Big)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{x+y+z-t}{2}\right)\left(\frac{x+y+t-z}{2}\right)\left(\frac{x+z+t-y}{2}\right)\left(\frac{z+t+y-x}{2}\right)}$$

ed indicando con p il semiperimetro del quadrilatero, si ha

$$S+S' = \sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)(p-t)}$$

PROBL. VI.

94. *Determinare la misura di un trapezio con due lati paralleli.*

Si dinotino con a, b i due lati opposti e paralleli, tra' quali la distanza sia h, è chiaro che, conducendo una delle diagonali, tal figura rimarrà da questa divisa in due triangoli un dei quali avrà per base a e per altezza h e verrà però espresso da $\frac{ah}{2}$, e l'altro la stessa altezza e per base b e però uguale a $\frac{bh}{2}$. Quindi l'insieme di entrambi, ossia il trapezio da misurarsi sarà quanto $\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}=\frac{h}{2}(a+b)$ cioè quanto *il prodotto della somma de' lati paralleli per la metà della di loro distanza*, *ovvero di questa per la semisomma de' detti lati.*

Cor. Se invece de' lati paralleli si conoscesse la parallela ad ugual distanza da questi, che dinotiamo con m, essendo $m=\frac{a+b}{2}$; mentre se pel punto medio di un lato obbliquo del trapezio si conduce la parallela alle due basi, questa chiaramente sarà maggiore della base più corta e minore della base più lunga : or perchè il punto si è scelto medio del lato , non vi sa-

rebbe ragione per cui l' eccesso sul lato più corto debba essere diverso dal difetto sul lato più lungo; sarà dunque $S = mh$ che è formola più pronta a calcolarsi.

PROBL. VII.

95. *Misurare un qualunque trapezio.*

Dopo ciò che si è detto nel probl. 3.° , basta solamente per risolvere il presente avvertire che, tirata l'una qualunque delle due diagonali la misura cercata verrà espressa della somma di ciascuna di quelle de' triangoli ne' quali resta diviso.

PROBL. VIII.

96. *Misurare un rettilineo, potendo ottenersi sul terreno medesimo, o sulla pianta che si abbia dati sufficienti alla misura de' triangoli ne' quali si può dividere lo stesso.*

Diviso questo in triangoli, sia mediante diagonali, arbitrariamente tirate o partenti dal vertice di un qualunque angolo a vertici degli angoli opposti, sia mediante linee che portano da un punto dell' aia e giungano a' vertici degli angoli del dato rettilineo, è chiaro che la somma di ciascuno di questi triangoli, (probl. 3.°) darà la misura cercata dell' intero rettilineo.

Cor. Se il rettilineo sia regolare, si trovi il centro del cerchio ad esso circoscrittibile *(Euclide prop. 13. IV)* e, congiunto lo stesso co' vertici tutti del rettilineo, basterà misurare un dei triangoli uguali ne' quali rasta diviso, *(prob. 3.°)* e moltiplicando tal risultato pel numero de' lati della figura, il prodotto esprimerà la cercata superficie.

97. Ma sia per le difficoltà del terreno e sia perchè rendesi più facile e spedita la calcolazione, suole ridursi non solo in triangoli, ma pure in rettangoli, trapezii ec. l'intero rettilineo con linee tirate in campagna nella superficie del medesimo secondo la sagacia dell'agrimensore, o con lo squadro e semicerchio da tavolino sul disegno della pianta già rilevata e però basta tener presente quanto si è detto (pag. 78 e seg.) circa il modo di stabilire le diretrici, avvertendo che l' è giovevole iscrivere nella

figura il massimo rettangolo possibile e suddividere nel modo anzidetto le rimanenti porzioni del terreno. Insomma è bene, potendo aver luogo per le locali difficoltà, di procurarsi sempre sopra luogo i dati necessarii alla misurazinne che, se saranno quelli soli che può offirire la squadra, sarà più sempliee la ealcolazione e però più spedita. Tal sistema si dice a *riduzione interna*. Si chiamerebbe a *riduzione esterna* quando riescisse più comodo al topografo, come in caso d' inaccessibilità del terreno a misurarsi, di circoseriver lo stesso eon un rettangolo ed in easo men vantaggiosn con un poligono del minor numero di lati possibili e di dividere poscia le porzioni esterne o quelle fra i lati di ambo i rettilinei in figure eome sopra, mentre la differenza tra la somma delle misure di queste e la misura del poligono circoscritto rappresenterà quella eercata. Finalmente per *riduzione mista* s' intende il complesso dei due primi sistemi, vale a dire quando si trova utile o neeessario di circoscrivere in parte ed in parte inscrivere un rettilineo al terreno dato.

Non sempre poi si hanno tutt' i dati necessarii per le misuro de' diversi terreni, o non possono rilevarsi per la inesistenza delle loro piante o per non potersi mettere in proporzione gli schizzi presi sopra luogo, ond' è neeessaria l' esposizione de' seguenti problemi poligonometrici.

PROBL. IX.

98. *Determinare la misura di un terreno poligonale rilevato a stazioni sueeessive, cioè eon la sola eonoseenza de' lati e gli angoli della figura.*

Siano $a, a' a''$... (*fig.* 76) i lati successivi di un poligono, A, A', A'',.. i successivi angoli, ed Ax il lato precedente ad a prolungato: dai vertiei si abbassino su tal lato le perpendieolari, sarà il poligono che ehiameremo $P = AA'o, + A'A''10, + A''A'''21, + +$.... di cui il primo è triangolo e gli altri trapezii. Siano y, $y' y'' y'''$... le sueeessive perpendieolari, $A'a$, $A''1$, $A'''2$, M', M'', M''' i loro angoli eoi lati del poligono, e $d, d' d''$... le rispettive distanze, sarà ehiaramente il poligono

$$P = \frac{1}{2} (dy + d'(y + y') + d''(y' + y'') + \ldots)$$

Inoltre chiaramente ·i ha

$$(1)\left\{\begin{array}{l} y = a \text{ sen. } A \\ y' = y + a' \text{ sen.}(A' - M') \\ y'' = y' + a'' \text{ sen.}(A'' - M'') \\ y''' = y'' + a''' \text{sen.}(A''' - M''') \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} d = a \ \text{cos.} A \\ d' = a' \ \text{cos.}(A' - M') \\ d'' = a'' \ \text{cos.}(A'' - M'') \\ d''' = a''' \text{cos.}(A''' - M''') \end{array}\right\}(2)$$

Intanto, considerando i poligoni $AA'1'\,1$, $AA'A''2'\,2$, $AA'A''A'''$ $3'\,3$ ec. essere birettangoli ed aventi 4, 5, 6... lati rispettivamente, si vedrà che gli angoli M', M'', M'''... facendo parte di essi, si avranno le somme per ciascuno

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} A + M' + 2r = 4r \\ A + A' + M'' + 2r = 6r \\ A + A' + A'' + M''' + 2r = 8r \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

in cui r è l' angolo retto.

Or sostituiti i valori delle (1) e (2) successivamente, si ottiene, ponendo L', L'', L''' ec. in luogo di $A'-M', A''-M'', A'''-M'''$ ec.

$$(4)..\left\{\begin{array}{l} y = a \text{ sen. } A\,, \\ y + y' = 2a \text{ sen. } A + a' \text{ sen. } L' \\ y' + y'' = 2(a \text{ sen. } A + a' \text{ sen. } L') + a'' \text{ sen. } L'' \\ y'' + y''' = 2(a \text{ sen.} A + a' \text{ sen.} L' + a'' \text{ sen.} L'') + a''' \text{ sen.} L''' \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

$$(5) \ldots d = a \text{ cos. } A\,,\ d' = a' \text{ cos. } L'\,,\ d'' = a'' \text{ cos. } L''\,,\ \text{ec.}$$

e posti nell' espressione di P danno

$$(6)..\left\{\begin{array}{l} 2P = a^2 \text{ sen.} A \text{ cos.} A + a' \text{ cos.} L' \left\{ 2a \text{ sen.} A + a' \text{ sen.} L' \right\} \\ \quad + a'' \text{ cos.} L'' \left\{ 2(a \text{ sen.} A + a' \text{sen.} L') + a'' \text{sen.} L'' \right\} \\ \quad + a''' \text{ cos.} L''' \left\{ 2(a s. A + a' s. L' + a'' s. L'') + a''' s. L' \right\} + \\ \quad \text{ec.} \end{array}\right.$$

Intanto dalla (3) si ricava

$$\begin{array}{l} M' = 2r - A \\ M'' = 4r - (A + A') \\ M''' = 6r - (A + A' + A'') \end{array}$$

dalle quali si ha immediatamente

$$(7) \ldots \left\{\begin{array}{l} A' - M' = A + A' - 2r = L' \\ A'' - M'' = A + A' + A'' - 4r = L'' \\ A''' - M''' = A + A' + A'' + A''' - 6r = L''' \\ \text{ec.} \end{array}\right.$$

Da queste si deduce

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen. } L' = -\text{sen.}(A + A') \\ \text{sen. } L'' = +\text{sen.}(A + A' + A'') \\ \text{sen. } L''' = -\text{sen.}(A + A' + A'' + A''') \\ \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots(8)$$

$$(9)\quad \begin{cases} \cos. L' = -\cos.(A+A') \\ \cos. L'' = +\cos.(A+A'+A'') \\ \cos. L''' = -\cos.(A+A'+A''+A''') \end{cases}$$

ec.

Tali valori delle (8) e (9), sostituiti nella (6) danno, posto E', E'', E''', ec. invece di $A+A'$, $A+A'+A''$, ec.

$$2P = a^2 \text{sen.}A \cos.A - a' \cos.E' \left\{ 2a \text{ sen.}A - a' \text{ sen.}E' \right\}$$

$$+ a'' \cos.E'' \left\{ 2(a \text{ sen.}A - a' \text{ sen.}E') + a'' \text{ sen.}E'' \right\}$$

$$- a''' \cos.E''' \left\{ 2(a \text{ sen.}A - a' \text{sen.}E' + a'' \text{sen.}E'') - a''' \text{ sen.}E''' \right\}$$

$$- a^{IV} \cos.E^{IV} \left\{ 2(a \text{sen.}A - a' \text{sen.}E' + a'' \text{sen.}E'' + a''' \text{sen.}E''') \right.$$

$$\left. + a^{IV} \text{sen.}E^{IV} \right\} - \text{ec.} \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Questa, ordinata e divisa per 2, da

$$P = \frac{1}{2} \left\{ a^2 \text{ sen.}A \cos.A + a'^2 \cos.E' \text{sen.}E' + a''^2 \cos.E'' \text{sen.}E'' + \ldots \right\}$$

$$- a \text{ sen.}A \left\{ a' \cos.E' - A'' \cos.E'' + a''' \cos.E''' - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$- a' \text{ sen.}E' \left\{ a'' \cos.E'' - a''' \cos.E''' + a^{IV} \cos.E^{IV} - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$- a'' \text{ sen.}E'' \left\{ a''' \cos.E''' - a^{IV} \cos.E^{IV} + a^{V} \cos.E^{V} - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$- a''' \text{ sen.}E''' \left\{ a^{IV} \cos.E^{IV} - a^{V} \cos.E^{V} + \ldots\ldots \right\}$$

$$- a^{IV} \text{sen.}E^{IV} \left\{ a^{V} \cos.E^{V} - \ldots\ldots\ldots \right\}$$

PROBL. X.

99. *Determinare l'aia di un poligono qualunque, rilevato ad intersezioni, senza conoscere che i dati soli del rilievo.*

Sia ABCDE (*fig.* 77) il dato poligono di cui sia noto AB formante base uguale ad a, le visuali AE, AD, AC che partano dal punto A sieno rispettivamente uguali a b, c, d, e gli angoli EAD, DAC, CAB che queste formano tra loro sieno espressi rispettivamente da α β, γ, e del pari sieno noti i valori delle visuali che partono dal punto B e degli angoli che desse formano tra loro.

Considerando il dato poligono diviso ne' triangoli EAD, DAC CAB di ciascun de' quali si conosce soltanto un angolo ed i lati che lo comprendono; saran l' aie di questi espresse rispettivamente da $\frac{bc}{2}\text{sen.}\alpha$, $\frac{cd}{2}\text{ sen.}\beta$, $\frac{de}{2}\text{ sen.}\gamma$ e la superficie S del poligono lo sarà da $\frac{bc}{2}\text{ sen. }\alpha+\frac{cd}{2}\text{ sen. }\beta+\frac{de}{2}\text{ sen.}\gamma$

Cor. Che se oltre la base AB non si conosca altro lato e solo sieno noti gli angoli $EAB=\Sigma$, $DAB=\theta$, $CAB=\varphi$, osservati al punto A e gli altri $EBA,=\Sigma'$, $DBA=\theta'$, $CBA=\varphi'$.

Considerando gli stessi tre triangoli, si ha pel primo $EAD=\frac{AE\times AD}{2}\text{ sen. }EAD$, ma nel triangolo AEB si ha

$\text{sen.}(\Sigma+\Sigma'):a::\text{sen. }\Sigma':AE$, laonde $AE=\frac{a\text{ sen. }\Sigma'}{\text{sen.}(\Sigma+\Sigma')}$; il triangolo DAB dà similmente $AD=\frac{a\text{ sen. }\theta'}{\text{sen.}(\theta+\theta')}$, sostituendo questi valori di AE ed AD nella precedente espressione di EAD, si ha

$$EAD=\frac{a^2}{2}\;\frac{\text{sen. }\Sigma'\text{ sen. }\theta'}{\text{sen. }(\Sigma+\Sigma')\text{ sen. }(\theta+\theta')}\times\text{sen.}(\Sigma-\theta),$$ similmente si ha

$$DAC=\frac{a^2}{2}\;\frac{\text{sen. }\theta'\text{ sen. }\varphi}{\text{sen. }(\theta+\theta')\text{ sen. }(\varphi+\varphi')}\text{ sen. }(\theta-\varphi)$$ e

$$CAB=\frac{a^2}{2}\;\frac{\text{sen. }\varphi'\text{ sen. }\varphi}{\text{sen. }(\varphi+\varphi')}$$, quindi

$$S=\frac{a^2}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{sen. }\Sigma'\text{ sen. }\theta'\text{ sen. }(\Sigma-\theta)}{\text{sen. }(\Sigma'+\Sigma)\text{ sen. }(\theta+\theta')}\\ +\frac{\text{sen. }\theta'\text{ sen. }\theta\text{ sen. }(\theta-\varphi)}{\text{sen. }(\theta+\theta')\text{ sen. }(\varphi+\varphi')}\\ +\frac{\text{sen. }\varphi'\text{ sen. }\varphi}{\text{sen. }(\varphi+\varphi')}+\text{ec.}\end{array}\right.$$

PROBL. XI.

100. *Determinare l' area di un terreno poligonale rilevato a stazione centrale.*

La soluzione di tal problema è chiara dopo ciò che si è detto (*probl. 8 §. 13*) , e però possiamo tacerla.

BROBL. XII.

101. *Misurare un poligono rilevato colla riduzione esterna* (§. 97) *per mezzo di più assi di ascisse di qualunque sistema e comunque inclinati.*

Si distinguono tre casi :

1.° Quando i vertici si riferiscono con ordine di successione.

2.° Quando per comodità si riferiscono ad un medesimo asse dello stesso sistema punti non successivi di ordine.

3.° Quando si fa uso di uno stesso asse per riferirvi diversi punti successivi , mutando però sistema d' angolo.

Cas. 1.° Abbiasi il poligono chiuso $aa'a''$ . . . . (*fig. 78*) ad angoli qualunque salienti cioè o rieotranti ed i dati geodesici sieno presi col seguente ordine atteso le locali circostanze.

Tirata comunque la retta AA′ iodefinita, siasi adottata per positiva la direzione da destra a sinistra e viceversa. Il primo vertice del poligono sia a, quello delle ascisse A_1 l'inclinazioone delle ordinate α, sempre verso l' origioe cioè a destra nella figura.

In tal sistema, coodotte le ordioate sempre positive (salvo se AA′ attraversa il poligooo , dovendosi le due parti calcolar separatamente) $y_1 y_1' y_1'' y_1''' y^{\text{IV}}$ . . . . . pei punti successivi, a, $a,' a''$, ec.; sieno $x_1\ x',\ x''$ . . . le ascisse corrispondenti, arrestandosi di assumere positive quelle pei vertici a cui si perviene cedendo in direzioone positiva (da A verso A′) e negative quelle pei punti

a cui si perviene retrocedendo per poco, avuto riguardo sempre alla loro successione, e questo vale anche pe' rimanenti assi.

Sarà chiaramente lo spazio poligono

$$aAA'a' = \text{sen.}\,a\left(\frac{xy}{2} + \frac{(x'-x)}{2}(y+y') + \frac{(x''-x')}{2}y'\right)$$

ed in generale pel 1.° sistema spazio poligono

$$= \frac{\text{sen.}\,a}{2}\Big(xy + (x'-x)(y+y') + (x''-x')(y'+y'')$$

$$+ (x'''-x'')(y''+y''') + \ldots + (x^n - x^{n-1})\,y^{n-1}\Big)$$

essendo n il numero dei lati.

La stessa espressione avrebbe luogo per ogni asse successivo, avvertendo di mettere 1, 2, 3 ... sotto tutt' i simboli in generale diversi e si avrebbero gli spazii omologhi $(a'A'A''a'')$, $(a''A''A'''a''')$ ec. che tutti si dovrebbero sottrarre dall' area totale del poligono formata dagli assi. Occorre ora calcolare l'area di tal poligono, poichè chiaramente i lati sono $x_1^{\,n}$ $x_1^{(n_1)}$, $x_2^{(n_2)}$, $x_3^{(n_3)}$ . . . . indicando (n), (n_1), (n_2) ... i numeri delle ascisse pel 1.° 2.° 3.°... sistema da doversi misurare onde avere l' aree precedenti.

Gli angoli A, A', A'' . . dei suoi vertici si potrebbero misurare, ma non sarà necessario, potendosi avere dai precedenti dati.

Infatti del quadrilatero $a\,x'_4\,Ax$ si hanno due angoli ed i quattro lati, e la sua area, come sopra si è accennato, dividendola in due triangoli per mezzo di aA è

$\frac{1}{2}(xy\ \text{sen.}\alpha + x'_4\,y'_4\ \text{sen.}\ \alpha_4)$. Ma dividendola in due triangoli con x'_4x (*fig.* 79), si ha la stessa uguale ad

$\frac{xp'}{2} + \frac{yp}{2} = \frac{xx'_4}{2}\ \text{sen.}A + \frac{yy'_4\ \text{sen.}\ B}{2} = \frac{1}{2}(xy\text{sen.}\alpha + x'_4y'_4\text{sen.}\alpha_4)$; inoltre la somma dei quattro angoli interni eguaglia 4 retti, dunque $A+B+\alpha+180^\circ-\alpha_4 = 360^\circ B = 180 + \alpha_4 - \alpha - A$, quindi

$\text{sen.}\ B. = \text{sen.}\left(A + (\alpha - \alpha'_4)\right) = \text{sen.}\ A\ \cos.(\alpha-\alpha_4) + \cos.\ A\ \text{sen.}$

$(\alpha-\alpha_4)$, e poichè se $m+1$ è il numero dei sistemi, n^m sarà il segno dell' ultima ascissa ed ordinata di esso dunque si avrà:

$$\frac{xx_m^{(n)}}{2}\text{sen. A}+\frac{yy_m^{(n)}}{2}\left(\text{sen.A }\cos.(\alpha-\alpha_m)+\cos.\text{A sen.}(\alpha-\alpha_m)\right)$$

$$=\frac{xy\text{ sen.}\alpha}{2}+\frac{x_m^{(n)}\,y_m^{(n)}\text{ sen.}\alpha_m}{2}\text{, donde si ricaverà :}$$

$$\text{sen. A}\left(xx_m^{(n)}+yy_m^{(n)}\cos.(\alpha-\alpha_m)\right)+yy_m^{(n)}\text{sen.}(\alpha-\alpha_m)\cos.\text{A}$$

$$-xy\text{ sen.}\alpha-x_m^{(n)}\,y_m^{(n)}\text{sen. }\alpha_m=o\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (1)$$

che darebbe l'angolo A, essendo gli altri elementi misurati antecedentemente.

Con simili riflessioni si avrebbero :

$$\text{sen. A}'\left\{x'x+y'y\cos.(\alpha'-\alpha)\right\}+y'y\text{ sen.}(\alpha'-\alpha)\cos.\text{A}'-$$

$$-x'y'\text{sen.}\alpha'-xy\text{ sen }\alpha=o\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (2)$$

$$\text{sen. A}''\left\{x''x'+y''y'\cos.(\alpha''-\alpha')\right\}+y''y'\text{ sen.}(\alpha''-\alpha')\cos.\text{A}''$$

$$-x''y''\text{ sen. }\alpha''-x'y'\text{ sen. }\alpha'=o\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (3)$$

$$\text{sen. A}'''\left\{x'''x''+y'''y''\cos.(\alpha'''-\alpha'')\right\}+y'''y''\text{se.}(\alpha'''-\alpha'')\text{ co.A}'''$$

$$-x'''y'''\text{ sen. }\alpha'''-x''y''\text{ sen. }\alpha''=o\text{ ec. ec.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (4)$$

In altro proposito dati i lati e gli angoli di un poligono si determinò l'equazione della sua area in funzione di tali dati (§. 98) laonde si può tener per calcolata e si dinoti con S, sarà, dopo averne dedotti i poligoni successivi in principio esaminati, l'area cercata nel poligono chiuso espressa dal suo doppio cioè 2N.

$$2\text{N}=2\text{S}-\left(xy\text{ sen. }\alpha+x_{,}\,y_{,}\text{ sen. }\alpha_{,}+x_2y_2\text{ sen. }\alpha_2+x_3y_3\text{ sen. }\alpha_3\right.$$

$$\left.+\ .\ .\ .\ .\ .+x_m\ y_m\text{ sen. }\alpha_m\right)-\left(\text{sen. }\alpha\,(x'-x)\,(y+y')\right.$$

$$+\text{ sen.}\alpha_{,}\,(x'_{,}-x_{,})\,(y_{,}+y'_{,})+\text{sen.}\alpha_2(x'_2-x_2)(y_2+y'_2)+.\ .\ .\ .$$

$$\left.+\text{ sen. }\alpha_m(x'_m-x_m)(y_m+y'_m)\right)-$$

$$-\left(\text{sen. }\alpha(x''_m+x')(y'+y'')+\text{sen. }\alpha_{,}(x_{,}''-x'_{,})(y_{,}'+y_{,}'')\right.$$

$$\left.+\text{sen.}\alpha_2(x''_2-x'_2)(y'_2+y''_2)+\ \dots\dots\dots\right)-$$

$$-\left(\text{sen.}\alpha\,(x'''-x'')\,(y''+y''')+\ \dots\dots\right)-\text{ ec. ec.}\dots \quad (5)$$

con legge manifesta, essendo i dati rilevati colle avvertenze poste in principio.

Cor. 1.° Se i sistemi son tutti ortogonali, sarà $\alpha=\alpha'=\alpha''=90$ onde le (1), (2), (3), (4), danno, dopo aversi nella (1)

$$\text{sen. A}\left(yy_m^{(n)}+xx_m^{(n)}\right)-xy-x_m^{(n)}\,y_m^{(n)}$$

le seguenti semplici espressioni

$$\text{sen. A}=\frac{xy+x_m^{(n)}\,y_m^{(n)}}{xx_m^{(n)}+yy_m^{(n)}}$$

$$\text{sen. A}'=\frac{x'y'+xy}{x'x+y'y}$$

$$\text{sen. A}''=\frac{x''y''+x'y'}{x''x'+y''x'}$$

e la (5) da

$$2\text{N}=2\text{S}-\left(xy+x_{,}y_{,}+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+\dots\right)$$

$$-\left((x'-x)(y'+y)+(x'_{,}-x_{,})(y'_{,}+y_{,})+(x'_2-x_2)(y'_2+y_2)+\right)$$

ec.

$$-\left((x''-x')(y''+y')+(x_{,}''-x_{,}')(y_{,}''+y_{,}')+\ \dots\dots\ \text{ec.}\right)$$

Ovvero, ordinando come si sono ottenute in principio (e ciò può farsi nella (5) ancora), si ha

$$2\text{N}=2\text{S}-\left(xy+(x'-x)(y'+y)+(x''-x')(y''+y')+\ \dots\right)-$$

$$-\left(x_1y_1+(x_1'-x_1)(y_1'+y_1)+(x_1''-x_1')(y_1''+y_1')\cdot\cdot\cdot\cdot\right)-$$

$-\ .\ .\ .\ .\ .$ ec. $.\ .\ .\ .\ .\ .$

con legge manifesta.

Caso 2.° Se invece di progredire come nel caso precedente, si volessero riferire all'asse AA′ (*fig. 80*) non solo a, a', a'' . . . per ordine ma anche $a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ . . . . punti non consecutivi ai primi, ma consecutivi tra loro, si noti la ordinata di salto a_9D più lontana da A, questa prolungata in D′ ad incontrare l'asse A‴D′ che è da classificarsi come al primo caso, chiuderà il poligono DA′ A″ A‴ D′ che colla parte ($o\ a^{I'}\ a_{IV}\ a_{V} \ldots a_8\ a_9$) forma un sistema riducibile al caso precedente. L'altra parte ($a^9\ a^{10}\ a^{11} \ldots\ a''\ a'^{o}$) si ridurrà al caso 3.°, calcolabile col riferirsi al solo asse AA′.

Per le direzioni valgono le precedenti avvertenze, e si dovranno rilevare ordinate ed ascisse di o, o′, o‴.... intersezioni dell'ordinate estreme, che attraversano il terreno. Le ordinate si assumono positive se a destra dell'asse AA′, negative se a sinistra, e si debbono sostituire nelle formole del caso 3.° Le ascisse poi sono positive se ai rispettivi punti si previene progredendo, cioè allontanandosi dall'origine, negative se retrocedendo o che essi sono nel perimetro inferiore o superiore dell'area.

Si noti pure che se la parte così rilevata è in mezzo al poligono, come è ($ad'\ a''\ a^{III} \ldots a_{VI}$) (*fig. 81*) allora s'intenderà compresa fra le ascisse estreme, cioè la più vicina e più lontana da A, e le parti laterali sono riducibili separatamente al caso 3.°

Cas. 3.° Siavi un'ostacolo M (*fig. 82*) per cui non tutti i punti siano riferibili ad un medesimo asse AB con uno stesso angolo, ma ad angolo ω′ veggasi il punto a^7, e notisi (a^h) intersezione della visuale col perimetro inferiore del terreno. Cominciando da a_I più vicino all'origine A, si percorrano successivamente i punti $a_I a_I^5$, a_I^6, $a_I 7$, a^7, a^6.... a_I'', a^v, fino a ritornare d'onde si era partito. Si avverta di misurare ascisse ed ordinate, le prime positive se arrivasi al punto seguente progredendo, negative se retrocedendo comunque esso sia posto rispetto ad AB, le ordinate sono positive, o negative secondo che il punto è a destra o a sinistra di AB.

Indicate con x, x', x'' .... $x^{(n)}$ le ascisse Ax', Ax'', Ax''' . . .

$.z''$, Az^{IV}, Az^{V}, con $y, y', y'', y''' \ldots\ldots y^{(n)}$ le ordinate $x' a,$ $x^5 a_5 \ldots\ldots z''' a_{l}'l'', z'' a_{l}''$, sarà dall' esposto

$$\text{l'area}\left(a^7\, a^6\, a_{,}^{V} \ldots\, a'\, a_{,}^{5}\, a_{,}^{6}\, a_{,7}\right)$$

$$=\frac{\text{sen. } \omega'}{2}\left\{ y\,(x'-x)+y'(x''-x)+y''(x'''-x')+y'''\,(x^{IV}-x'')\right.$$

$$\left.+y^{(n-1)}\left(x^{(n)}-x^{(n-2)}\right)\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

In modo del tutto identico e con eguali avvertenze si osservivino ad angolo ω i rimanenti vertici del terreno riferendoli alla stessa AB, ed origine A essendo $XX'X'' \ldots X^{(m)}$, $YY'Y''Y''' \ldots$ $Y^{(m)}$ le coordinate cominciando da $a_{,7}$ fino ad a^7, sarà area

$$\left(a7\, a^{V}\, a^{IV}\, a'''\, \ldots\ldots\, a'\, a_{,}^{7}\right)=\frac{\text{sen. } \omega}{2}\left\{ Y\left(X'-X\right)+\right.$$

$$+Y'\left(X''-X\right)+Y''\left(X'''-X\right)+\cdots$$

$$\left.+Y^{(m-1)}\left(X^{(m)}-X^{(m-2)}\right)\right\}\ \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

L' area totale del poligono si ha addizionando le (9) (10) e quindi

$$S=\frac{\text{sen. } \omega'}{2}\left\{ y\,(x'-x)+y'\,(x''-x)+y''(x'''-x')+\cdots\right.$$

$$\left.+y^{(n-1)}\left(x^{(n)}-x^{(n-2)}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\text{sen. } \omega}{2}\left\{ Y(X'-X)+Y'(X''-X)+\right.$$

$$+Y''(X'''-X')+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+Y^{(m-1)}\left(X^{(m)}-X^{(m-2)}\right)\right\}\ \ldots\ldots \quad (11)$$

Non può aver luogo altra combinazione di riduzione esterna oltre le tre esposte, e qualora vi fossero più ostacoli, e si dovesse ricorrere a diversi angoli è facile osservare come dovrebbero regolarsi le misure locali, e qual diverrebbe la formola precedente.

Cor. 1.° Per gli usi topografici è sufficiente l'approssimazione che si ottiene considerando il perimetro curvilineo di un terreno come quello di un poligono del maggior numero di lati possibili; ma volendosi quella maggiore si può ottenere senza gran fatica di calcolo, considerando que' lati, siccome altrettanti archi parabolici giusta l'ingegnoso seguente teorema a solo oggetto di trattare compiutamente il problema di cui ci stiamo occupando.

Menato un asse qualunque AS (*fig. 83*), si divida in un numero pari di parti eguali, cioè AP=PQ=QR ... $=h$, e da tali punti si elevino le perpendicolari AL, PM, QN ...... indicate con y_1, y_2, y_3, y_4 ... y_{2n+1}, se con S s' indica l'area ALXS, si avrà

$$S=\frac{1}{3}\,h\left\{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+\ldots\ldots+y_{2n+1}\right\}$$

in cui l'approssimazione è tanto maggiore, quanto minore è h. Tal formola si ha considerando parabolici gli archi LN, NX.... coi diametri PM, RO .... In tal caso, supposto congiunta la corda LN, il segmento parabolico sarà due terzi del parallelogrammo che si ha, menando per M la parallela alla corda LN supposta, cioè

$$\frac{2}{3}(AQ)\left\{MP-\frac{(LA+NQ)}{2}\right\}=\frac{2}{3}\,2h\left\{y_2-\frac{y_1+y_3}{2}\right\}$$

$$=\frac{h}{3}\left\{4y_2-2y_1-2y_3\right\},$$

il trapezio poi $LNQA=(AQ)\left\{\frac{LA+NQ}{2}\right\}=h\,(y_1+y_3)$, adunque

l'intera area ALNQ sarà $\frac{h}{3}\,(y_1+4y_2+y_3)$.

Lo stesso avendosi per le successive aree parziali NQSX, ec... sarà

$$S=\frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+y_3+\right)\frac{h}{3}\left(y_3+4y_4+y_5\right)+\text{ ec...}$$ che riducesi a quella esposta in principio.

Altra formola più semplice, ma meno approssimativa si ha trascurando i segmenti parabolici, e ritenendo i soli trapezii i quali, or trovati, con l' addizione danno

$$S = h(y_1 + y_2) + h(y_3 + y_5) + h(y_5 + y_7) + \dots$$

ed invece di h mettendo $\frac{h}{2}$ e sostituendo apici per ordine si ha

$$S = \frac{h}{2} \left\{ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + \dots\dots + y_n \right\}$$

in cui non è necessario che il numero delle parti eguali ad h sia pari, e tanto più è approssimativa quanto minore è h.

Scol. Entrambe le formole dovrebbero raddoppiarsi quando la curva fosse simmetrica intorno l' asse AS.

PROBL. XIII.

112. *Misurare il cerchio.*

La misura del cerchio è espressa dal prodotto della circonferenza per la metà del raggio (Arch. Mis. del Cerch.). Or, indicando con π il numero 3, 1415926, che esprime la circonferenza del cerchio di diametro 1, ed essendo le circonferenze dei cerchi come i diametri, sarà la circonferenza di un cerchio di raggio r p. e. espressa da $2\pi r$ e però il cerchio corrispondente da πr^2.

Scol. Non esigendosi, come ne' lavori topografici, grande approssimazione, si potrà, come all' ordinario si usa, adoperare pel rapporto del diametro alla circonferenza quello di 7 a 22, rinvenuto da Archimede, ed allora la superficie del cerchio di raggio r sarà espressa da $\frac{22r^2}{7}$.

PROBL. XIV.

113. *Misurare un dato settore circolare.*

La misura dell' aia di un dato settore circolare eguaglia il prodotto dell' arco che lo sottende per la metà del raggio. Or perchè, come abbiam detto, la circonferenza di un cerchio di raggio r è espressa da $2\pi r$, chiamando n il numero de' gradi del

dato angolo, ed istituendo la proporzione 360 : n :: $2\pi r$ al quarto proporzionale, questo che sarà $\frac{2n\pi r}{360}$, esprimerà l' arco proposto, e

quindi l'aia del settore sarà espressa da $\frac{2\pi nr}{360}\times\frac{r}{2}=\frac{\pi nr^2}{360}$

PROBL. XV.

114. *Misurare l' anello circolare tra due cerchi concentrici.*

Si misuri ciascuno di essi cerchi (§. 115); la differenza de' numeri risultanti da tale misura, darà l' aia dell' anello proposto. Ma si rende più spedito il calcolo, osservando che, chiamando r il raggio del cerchio maggiore e r' quello del minore, tal superficie sarà espressa da $\pi r^2-\pi r'^2$, ovvero da $\pi\,(r^2-r'^2)$, cioè da $\pi\,(r+r')\,(r-r')$; che però è meglio usare addirittura questa formola.

PROBL. XVI.

115. *Misurare la porzione di anello circolare compresa tra due settori concentrici.*

Si determini ciascun de' settori (§. 113); la loro differenza dinoterà la misura cercata. Ma se r, r' dinotino rispettivamente il raggio maggiore; e 'l minore dei settori proposti, questi saranno espressi da $\frac{\pi nr^2}{360}$, e $\frac{\pi nr'^2}{360}$, dinotando n il numero de' gradi degli archi che li sottendono. Or la superficie richiesta, dovendo essere uguale a $\frac{\pi nr^2}{360}-\frac{\pi nr'^2}{360}=\frac{\pi n}{360}\,(r^2-r'^2)=\frac{\pi n}{360}\,(r+r')\,(r-r')$ sarà quest' ultima l' espressione cercata.

Resterebbe solo a parlare della misura della effettiva superficie da' terreni irregolarmente disposti. Essi mai potendosi avere rigorosamente determinati sonosi da varii autori esposti alcuni metodi per determinarla per approssimazione che noi tralasceremo come empirici e riprovevoli ed invece, per tali rarissime occasioni (mentre al topografo necessita la proiezione orizzontale della superficie inclinata e non questa effettivamente), si se-

gnino diverse linee sul terreno in modo che lo stesso venga diviso in diverse porzioni o figure più o meno grandi in ragione della maggiore o minore regolarita del terreno, e procurati i dati sufficienti per la loro misura (non per quella della loro proiezione orizzontale), si esegua la stessa con le regole anzidette, mentre la loro somma esprimerà con approssimazione la cennata misura e precisamente quella del poliedro che il topografo accorto avrà saputo prescegliere come quello tra i tanti di cui la superficie meglio si approssimava alla effettiva misura del terreno.

SEZIONE II.

METODI GENERALI E DETERMINATI, ANALITICI E GEOMETRICI PER LA DIVISIONE DEI TERRENI IN PARTI DI DATA ESTENSIONE O CHE SIANO FRA LORO IN DATO RAPPORTO.

IPOTESI PRIMA

116. *Dividere un terreno a due lati paralleli in modo che sia di data estensione l'area trapezia compresa fra essi, il terzo lato e la partitrice che soddisfi ad una qualunque condizione.*

PROBLEMA GENERALE.

Sia CABD il dato terreno (*fig. 84*), CA parallela a DB, AB $=a$, CAB$=\theta$. Suppongasi MF la chiesta partitrice, che separi dal detto terreno l' area MABE di data estensione E, e bh una qualunque parallela ad MF. Mettasi l' ignota MA$=$B, $\frac{hB}{bB}=$A Si meni ML parallela ad AB. Pei principii di analisi si ha il parallelogrammo MABH$=a$B sen. θ. Il triangolo EMH$=\frac{1}{2}a$(EH) sen. EHL $=\frac{1}{2}a$ (EH) sen. θ, ma $\frac{\text{EH}}{\text{MH}}=\frac{hB}{bB}=$A $=\frac{\text{EH}}{a}$ dunque EH$=a$A, quindi EMH$=\frac{1}{2}a^2$A sen. θ.

Riunendo le due arce, sarà

aB sen. $\theta+\frac{1}{2}a^2A$ sen. $\theta=E$, d'onde $B+\frac{1}{2}aA=\frac{E}{a \text{ sen. } \theta}$. . (1)

In tale equazione sarà dato un rapporto fra A e B, poichè la retta partitrice dovrà essere sottoposta a qualche condizione, laonde sarà quella sufficiente a dare l' altro dei due sudetti elementi che determinano pienamente la posizione della cercata retta. Questo meglio si osserva nei segnenti problemi

PROBL. I.

117. *Soluzione del caso generale, volendo che la partitrice passi per un dato punto.*

Metodo analitico.

Sia F il punto dato (*fig. 84*), menata la FG parallela ad AB, sarà $FG=b$, $AG=c$, quindi $B=(MA)=(FG)-(FL)=b-(FL)=b-\frac{(FL)}{(AG)}(AG)=b-A(AG)=b-Ac$. Con ciò la (1) dà

$$A=\frac{ab \text{ sen. } \theta-E}{a(c-\frac{a}{2}) \text{ sen. } \theta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

equazione che si presta agevolmente per la soluzione numerica.

Metodo grafico.

Sia ABCD il dato terreno (*fig. 85*), DC parallela ad AB, P il dato punto: menato PL parallela ad AB, sia il parallelogrammo $CBGM=E$ (Nota *a*) sarà $PL=b$, $CB=c$, $CB=a$, $NCBH=ab$ sen. θ, $CBGM=a(MC)$ sen. θ, (Nota *b*), $NMGH=ab$ sen. $\theta-E=a(NM)$ sen. θ.

Preso K medio di MG, risulta $FK=c-\frac{a}{2}$, onde la (2) diviene $A=\frac{NM}{LK}$, sicchè la cercata partitrice è PQ.

Cor. 1.° Congiunta PB, ed avuto m, se $MC=\frac{mC}{2}$, sarà PB

la partitrice, se $MC < \frac{mC}{2}$ la parte separata non sarà trapezia ma bensì triangolare, ed allora dovrà ricorrersi alla ipotesi seconda, di cui or ora parleremo.

Cor. 2.° Se P cada sul lato DC, regge la stessa costruzione, ed il corollario precedente. Se cada nel mezzo di NH non vi ha soluzione, che nell'unico caso in cui E=NCBH, ed allora NH sarebbe la partitrice.

Cor. 3.° La stessa costruzione vale se il punto P sia situato fra i due lati paralleli, ed ha luogo anche il corollario primo.

PROBL. II.

118. *Soluzione del caso generale, volendo che la partitrice sia parallela ad una retta data.*

Metodo analitico.

Nella (1) §. 116 è ignoto solo B, e quindi $B = \frac{E}{a \text{ sen.} \theta} - \frac{aA}{2}$,

e se E riducesi a parallelogrammo di base a ed angolo θ, come nel precedente problema, (Nota a) chiamando K il secondo suo lato, sarà $E = aK \text{sen.}\ \theta$, onde l' equazione precedente diviene

$$B = K - \frac{aA}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

che risolverà il problema per mezzo del calcolo numerico.

Metodo grafico.

Siano EB, CD i due lati paralleli (*fig. 86*), il parallelogrammo QBCG′=E, N medio di QG, la MNO, parallela alla retta data, FG sarà la cercata partitrice. Infatti (1)

$$A = \frac{(CG)}{(CF)} = \frac{(OG')}{(G'N)} = \frac{(OG')}{{}^1/_2 a}, (OG') = \frac{a}{2} A = (QM), (QB) = (KMB) = B$$

$$= (QB) - (QM) = K - \frac{a}{2} A.$$

Cor. 1.° Se la retta partitrice debb' esser parallela alla base (BC) essa sarà (QG′).

Cor. 2.° Dal punto B, menata la parellela ad FG, avrà luogo l'esposto al corollario 1.° del problema 1.°

PROBL. III.

119. *Soluzione del caso generale, volendo che la parte della partitrice intercetta fra i due lati paralleli risulti di data lunghezza.*

Metodo analitico.

Sia GF (*fig. 87*) la partitrice, GH parallela a CD, ed il rimanente come nel problema primo. Sarà

$$\frac{FH}{GH}=A=\frac{FH}{a},\ FH=aA, \text{ inoltre (Nota } c)$$

$$(GF)^2=d^2=(GH)^2+(FH)^2-2(GH)(FH)\cos. ICD$$
$$=a^2+a^2A^2-2a^2 A\cos.\theta=a^2(1-2A\cos.\theta+A^2)$$

Da ciò risulta $A=\dfrac{a\cos.\theta\pm\sqrt{d^2-a^2\operatorname{sen.}^2\theta}}{a}$, e la (3) da

$$B=\frac{2K-a\cos.\theta\mp\sqrt{d^2-a^2\operatorname{sen.}^2\theta}}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

che in generale da una doppia soluzione.

Cor. 1.° La minima lunghezza d è senza dubbio la distanza dei lati paralleli, che è MD espressa da a sen. θ, sicchè se $d=a$ sen. θ, si avrà $B=K-\dfrac{a\cos.\theta}{2}$, e dovrà aversi $K>\dfrac{MC}{2}$ per aversi soluzione, essendo $(MC)=a\cos.\theta$.

Cor. 2.° In generale, dovendo B esser positivo, e inoltre $K>\dfrac{MC}{2}$, dovranno per la doppia soluzione aversi le condizioni

$$K>\frac{a}{2}\cos.\theta$$

$$K^2-Ka\cos.\theta>\frac{d^2-a^2}{4}$$

delle quali la seconda si ha dal supporre positivo il secondo membro della (4). Esse danno ancora, dinotando con e l'eccesso

$$\left.\begin{array}{l} K = e + \frac{a}{2}\cos.\theta, \\ 2e > \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen}^2\theta} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Ora centro D, raggio $DN = d$ descrivasi un' arco, sia $IC = 2K$, sarà $NM = \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen.}^2\theta}$, $IM = 2K - a\cos.\theta = 2e$, onde *per la doppia soluzione dovrà essere* $IM > NM$.

Cor. 3.° Se $IM < NM$ si avrà una sola soluzione, valendo il solo segno positivo del radicale. Non ammetterà poi alcuna soluzione se $d < a$ sen. θ, cioè non può aversi il triangolo rettangolo NMD.

Soluzione grafica.

Dal punto D abbassata la perpendicolare DM, preso $DN = d$ parte intercetta data, $IC = 2K = 2GC$, si prenda O medio di IN, facciasi $PC = ON$, $PQ = MN$, indi con centri in P, e Q e raggio $= d$ descrivansi archi di cerchio, si avranno così S, R, e finalmente le partitrici cercate saranno PS, QR, se vi è doppia soluzione.

In altro modo. Le due QR, PS s' incontrano nel punto medio di GH, sicchè centro in questo e raggio $= \frac{d}{2} = \frac{DN}{2}$, si descrivano due archi, si avranno così i punti Q, ed S, e le cercate partitrici RQ, PS.

Evidente ne è la ragione, poichè nei corollarii precedenti si è veduto essere $\frac{IN}{2} = \frac{2K - a\cos.\theta - \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen.}^2\theta}}{2}$

$$\frac{IN}{2} + NM = \frac{2K - a\cos.\theta - \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen.}^2\theta}}{2} + \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen.}^2\theta}$$

$$= \frac{2K - a\cos.\theta + \sqrt{d^2 - a^2 \text{sen.}^2\theta}}{2}$$

120. Da un qualunque terreno separare un'area triangolare di data estensione con una retta partitrice, che soddisfi ad una data condizione.

PROBLEMA GENERALE.

Siano AB,BC (*fig. 88*) i due lati, l'angolo $ABC=\theta$, la partitrice AC, E=ABC area triangolare data.

Mettasi $AB=x$, $BC=y$, sarà $ABC=\frac{xy \text{ sen.}\theta}{2}$, onde

$$2E=xy \text{ sen. } \theta \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

sarà la condizione generale a soddisfarsi.

PROBL. I.

121. *Risolvere il caso enunciato, volendo che la partitrice passi per un punto dato.*

Soluzione analitica.

Sia P (*fig. 88*) tal punto, menata ad AB la parallela PD fino all' incontro di BC, mettasi $PD=a$, $DB=b$, sarà

$\frac{a}{b+y}=\frac{x}{y}$, onde $y=\frac{bx}{a-x}$, e quindi la (6) da

$$x+\frac{E}{b \text{ sen. } \theta}=\pm\sqrt{\left(\frac{E}{b \text{ sen. } \theta}\right)^2+\frac{2aE}{b \text{ sen. } \theta}} \dots\dots (7)$$

Riducasi l'area E ad un triangolo DBF con base $DB=b$, ed angolo $BDF=\theta$ (Nota *d*) sarà $E=\frac{bK \text{ sen.}\theta}{2}$, posto $FD=K$,

e quindi la precedente riducesi all' altra

$$x+\frac{K}{2}=\pm\sqrt{K\left(a+\frac{K}{4}\right)} \dots\dots\dots\dots (8)$$

che dà facilmente il valore d' x, e quello poi d' y si avrà col-l' altra

$$y=\frac{bx}{a-x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

Cor. 1.° Se il punto P è nell' angolo ABD supplemento di θ, sono a, b positivi. Se in ABC $=\theta$ si ha $+a, -b$. Se in CBG verticale di ABD si ha $-a, -b$. Se in DBG si ha $-a+b$. Quando poi b è negativo, deve esser tale anche K nella (8).

Cor. 2.° Se il punto P è sopra uno dei lati per esempio in C, sarà $a=o$, BC $=-b$, onde le (8), (9) danno $x=\mathrm{K}$, $y=b$, e la soluzione riducesi a trovar K del triangolo FBD menzionato da principio.

Cor. 3.° Se il punto è nell' angolo ABC o CBG le (8), (9) danno pel corollario precedente

$$x=\frac{\mathrm{K}}{2}\pm\sqrt{\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{K}}{4}+a\right)}\ \text{ed}\ y=\frac{bx}{x\mp a}$$

e di a vale il segno meno, o più secondo che sta nel primo, o secondo angolo.

(a) Sia nel primo, cioè in ABC, dovrà essere sempre, per essere possibile qualche soluzione, $\frac{\mathrm{K}}{4}>a$. Avverandosi questo, si avrà sempre doppia soluzione, perchè qualunque dei segni si fa valere nel radicale, sarà positivo sì il segno d'x, che quello d'y, come appunto dee avvenire.

Infatti dovrà aversi $x-a>o$, e fatto $\mathrm{K}=4ma$, essendo $m>1$, si avrà

$$x-a=2ma\pm\sqrt{4ma(ma-a)}-a=a\left(2m-1\pm2\sqrt{m(m-1)}\right),$$

onde $2m-1\pm2\sqrt{m(m-1)}>o$, la quale è soddisfatta qualunque sia m.

(b) Sia il punto nell' angolo CBG, si avrà unica soluzione, poichè del radicale deve adoprarsi il solo segno positivo affinchè tali siano i valori d'x e d'y. In tal caso può esser qualunque il rapporto fra K ed a.

Cor. 4.° Trovandosi il punto P in uno degli angoli ABD, o DBG, si avrà $=x-\frac{\mathrm{K}}{2}\pm\sqrt{\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{K}}{4}\pm a\right)}$, $y=\frac{-bx}{x\mp a}$

(c) Se è nel primo angolo, a avrà il segno superiore, e si ha unica soluzione, valendo il segno più del radicale, il valore poi d'x, e d'y risulterà sempre positivo.

(d) Se il punto è nel secondo angolo DBG, non avrà luogo alcuna vera soluzione, poichè qualunque segno del radicale, si fa valere, saranno sempre x ed y di segno opposto. Ciò per altro facilmente si concepisce mediante semplici vedute geometriche, non essendo possibile separare un area triangolare compresa dai veri lati del terreno.

Soluzione grafica.

Suppongasi che il punto P sia nell' angolo CBG, ovvero ABD Prendasi $PR = \frac{FD}{4}$ su di FD descrivasi un semicerchio, e ad essa si elevi la perpendicolare RG, sarà $GD = \sqrt{K\left(\frac{K}{4} + a\right)}$.
Stando il punto in CBG, aggiunto GD alla metà di FD si avrà x (Cor. 3.° *(b)*), se è nell' angolo ABD si sottrarrà da GD la metà di FD (Cor. 4.° *(c)*).

Suppongasi ora il punto nell'angolo vero ABC, invece di prendere la somma di PD, e PR se ne prenderà la differenza, ed il resto è lo stesso. Intanto si ha doppia soluzione, poichè si avrà x tanto aggiungendo, che sottraendo dalla metà di FD la lunghezza GD (Cor. 3.° *(a)*) ovvero $x = Dr$, o $x = DT$.

Comunque sia situato il punto, si troverà il valore d'y riducendo l'area E ad un triangolo di base $= x$, ed angolo adiacente $= \theta$, ciò che è esposto nella nota *(d)*.

PROBL. II.

122. *Soluzione dell' ipotesi enunciata, volendo che la partitrice sia parallela ad una data retta, ovvero che la porzione separata formi un triangolo simile ad un' altro dato con lo stesso angolo dei due lati del terreno.*

Metodo analitico.

Sia GBC (*fig.* 89) il dato terreno , GC la retta data a cui dev' esser parallela la partitrice ignota DF, sia GB$=a$, BC$=b$, sarà (16)$\frac{DB}{BF}=\frac{x}{y}=\frac{GB}{BC}=\frac{a}{b}$, onde $y=\frac{bx}{a}$, e la (6) darebbe

$$x^2=\frac{2aE}{b\ \text{sen.}\ \theta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

Riducasi l' area a triangolo (17) , avendosi E$=\frac{bK}{2}$ sen. θ , la (10) darà

$$x=\sqrt{aK}.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11)$$

che ammette sempre soluzione , e sempre unica.

Metodo grafico.

Sia BHC il nominato triangolo eguale ad E, sarà (17) BH$=$K, descritto il semicerchio GLB , elevata la perpendicolare LH, descritto l' arco LD con centro in B e raggio BL , sarà BD$=x$. La DF parallela a GC sarà la cercata partitrice.

PBOBL. III.

123. *Soluzione del caso generale, volendo che la parte intercetta fra i due lati risulti di data lunghezza.*

Si ha (*fig.* 89) $(DF)^2=(DB)^2+(BF)^2-2(DB)(BF)$ cos. DBF , or si voglia DF$=d$ lunghezza data , avrebbesi

$d^2=x^2+y^2-2xy$ cos. θ, d' onde $y=x$ cos. $\theta\pm\sqrt{d^2-x^2\text{sen.}^2\ \theta}$,

e la (6) diverrebbe $2E=x^2$ sen.θ cos $\theta\pm x$ sen.$\theta\ \sqrt{d^2-x^2\ \text{sen.}^2\theta}$.

La stessa, risoluta da per x, il doppio valore

$$x=\sqrt{2E\cot.\theta+\frac{d^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{d^4}{4}+2Ed^2\cot.\theta-4E^2\right)}}\quad\ldots\quad(12)$$

Riduceasi (§. 121) E al triangolo di base d, ed angolo θ, sarà $E=\frac{Kd}{2}$ sen. θ, e la precedente riducesi all' altra

$$x=\sqrt{d\left\{\frac{d}{2}+K\cos.\theta\pm\sqrt{\left(\left(\frac{d}{2}+K\cos.\theta\right)^2-K^2\right)}\right\}}.\ (13)$$

ed una delle precedenti due sarà da adoperarsi pel calcolo numerico.

Cor. 1.° Poichè x dev' esser sempre positivo, non vi è doppio segno innanzi al radicale generale.

Per aversi poi soluzione in qualsivoglia caso, dovrà aversi (supposto θ acuto) $\frac{d^2}{4}+dK\cos.\theta>K^2\text{sen.}^2\theta$, il che ha luogo, come può vedersi risolvendo la disuguaglianza rispetto a d, quando $d>2K(1-\cos\theta)$ . . . . (14)

Cor. 2.° La soluzione che si è osservata aver luogo, è altresì sempre doppia, perchè è sempre

$$\frac{d}{2}+K\cos.\theta>\sqrt{\left(\frac{d}{2}+K\cos.\theta\right)-K^2}.$$

Si avverta a tal fine che d e K si debbono assumere come essenzialmente positivi.

Cor. 3.° La soluzione sempre doppia può aversi o che sia θ angolo acuto, o che sia retto, o che sia ottuso. Per l'angolo acuto vale la (13) e la condizione (14), per l' angolo retto vale la seguente

$$x=\sqrt{d\left\{\frac{d}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{d^2}{4}-K^2\right)}\right\}}\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

dovendosi avverare la condizione $d>2K$ . . . . . . (16)

Cor. 4.° Per l' angolo ottuso risulta

$$x=\sqrt{d\left\{\frac{d}{2}-K\cos.\theta\pm\sqrt{\left(\frac{d}{2}-K\cos\theta\right)^2-K^2}\right\}}\quad\ldots\quad(17)$$

che dà soluzione sempre doppia, qualora si ha la necessaria condizione

$$d > 2K\,(1+\cos.\theta) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Cor. 5.° Nei tre casi di θ acuto, retto, ottuso, se invece delle disuguaglianze (14). (16), (18), si abbiano eguaglianze, la doppia soluzione si ridurrà ad unica. Quindi per ognuno di essi sarà $x = \sqrt{dK}$.

Cor. 6.° Ottenuto x, il valore d'y ricaverebbesi dalla (6) avendosi $y = \frac{dK}{x}$ . . . . (19).

Se nell'equazioni che danno x s'inverta il segno al radicale, si avranno i valori d'y, e questo potrà osservarsi nella verifica che si ottiene della primitiva equazione (12), sicchè in tutti i casi precedenti i due valori d'x son tali, che, ritenuto il primo, sarà il secondo quello d'y, e viceversa, sicchè calcolati ambedue potrà farsi a meno della (19), la quale può usarsi quando un solo dei valori d'x vuol calcolarsi, ovvero costruirsi.

Metodo grafico.

Sia ABC (*fig.* 90) il dato terreno, $BF = \frac{d}{2}$, essendo d=BO la data lunghezza della parte intercetta. Si trovi il parallelogrammo GBFH=E con base BF (Nota *a*) (*), sarà ABC=θ, GB=K. Abbassata la perpendicolare GL, ed essendo θ acuto, prendasi FC=BL (se θ fosse acuto, si prenderebbe la differenza come mostra la (17)) Su BC descrivasi il semicerchio BMC; centro B, raggio BG descrivasi un'arco, si avrà il punto M, e la retta MC. Centro C raggio MC descrivansi i semicerchi NMN′, BPO, B*m* N′, e si elevino le perpendicolari N*n*, O*m*: i due valori d'x saranno B*n*, e B*m*, onde fatto B*q*=B*n*, BA =B*m*, per *q* ed A passerà la partitrice nella doppia soluzione.

A compiere la soluzione, sulle basi B*q*, BA e con angolo θ dovrebbero costruirsi due triangoli eguali a GBFH=E, ciò che si osserva nella nota *d*, ma avendo riguardo al corollario 6.° (§. 123), si prenda B*r*=B*q*, B*s*=BA, le partitrici saranno *r*A, *qs*.

(*) Per le note che si citano nella presente sezione si vegga il §. 133.

Si noti intanto che i due triangoli ABr, Bqs sono eguali, e ciò conferma la discussione del citato corollario.

PROBL. IV.

124. *Soluzione del caso generale, volendo che la partitrice intercetta fra i due lati abbia dato rapporto ad uno di essi, o ad ambedue.*

Metodo analitico.

Tenendo presente l'esposto al (§. 122) sia z la parte intercetta, ed essendo m, n, p tre date quantità, mettasi per maggior generalità $z=mx+ny+p$ . . . . (20)
si avrà (§. 123) l'equazione

$$(n^2-1)y^2+(m^2-1)x^2+2y\left\{xmn+x\cos\theta+np\right\}+p^2+2mpx=o$$

ma dalla (19) $y=\frac{dK}{x}$ (avendo d, K il significato del §. 123),
dunque $(m^2-1)x^4+2mpx^3+(p^2+2mndK+2dK\cos.\theta)x^2+2npdKx+d^2K^2(n^2-1)=o$. . . . . (21)

1.° Sia $m=n=1$, le (20) e (21) danno

$$\left.\begin{aligned} &z=x+y+p \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x=-\left(\frac{p}{4}+\frac{dK}{p}\cos.^2\frac{\theta}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{p}{4}+\frac{dK}{p}\cos.^2\frac{\theta}{2}\right)^2-dK}\end{aligned}\right\}\;(22)$$

2.° Se $p=o$, le (20) (21) danno

$$\left.\begin{aligned} &z=mx+ny \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x=\sqrt{dK\left\{\frac{mn+\cos.\theta}{1-m^2}\pm\sqrt{\left(\frac{mn+\cos.\theta}{1-m^2}\right)^2-\frac{1-n^2}{1-m^2}}\right\}}\end{aligned}\right\}\;(23)$$

PROBL. V.

125. *Separare da un dato terreno una parte triangolare di data area in modo che la partitrice ed un lato contiguo siano di minima lunghezza.*

Soluzione analitica.

L' area E riducasi ad un triangolo isoscele ABC (Nota *c*) (*fig. 100)* in cui $AB=x$, $AC=y$, $BC=p$ partitrice, $ABC=\theta$. Dovrà aversi

$$\left.\begin{array}{l} x=m\sqrt{\left(2\ \text{sen.}\frac{1}{3}(90°+\theta)\right)} \\ y=\dfrac{m}{\sqrt{\left(2\ \text{sen.}\frac{1}{3}(90°+\theta)\right)}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

che risolvono il problema.

Dimostrazione.

Si ha dalla (6) $xy=\frac{2E}{\text{sen.}\,\theta}$, $E=ABC=\frac{m^2}{2}\text{sen.}\theta$, dunque $xy=m^2$

Inoltre per un noto teorema (Nota *c*) si ha

$p=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos.\theta}$, e se si vuol minimo AC+BC dovrà esser tale $y+p$, e da p eliminando x colla precedente risulta

$$y+\sqrt{\frac{m^4}{y^2}+y^2-2m^2\cos.\,\theta}=\text{Minimo.}$$

Affinchè sia tale dando ad y un qualunque aumento d , dovrà essere

$$y+d+\sqrt{\left(\frac{m^4}{(y+d)^2}+(y+d)^2-2m^2\cos\,\theta\right)}>y+p$$

$$\text{ovvero } d+\sqrt{\left\{p^2+d(2y+d)\left(1-\frac{m^4}{y^2(y+d)^2}\right)\right\}}>p$$

come si ha da facile calcolo.

Mettasi per brevità il coefficiente di d eguale ad M , si avrà

$$d+\sqrt{p^2+dM}>p$$

e sviluppando col binomio di Newton

$$d+p\left(1+d\frac{M}{p}\right)^{1/2}>p$$

$$d+p\left(1+\frac{dM}{2p}-\frac{d^2}{8}\frac{M^2}{p^2}+\dots\right)>p$$

$$1+\frac{M}{2p}-\frac{d}{8}\frac{M^2}{p^2}+\dots>o$$

ma quando $d=o$ il segno $>$ si muta in $=$, dunque $1+\frac{M}{2p}=o$,

ovvero

$$1+\frac{y\left(1-\frac{n.^4}{y^4}\right)}{p}=o\,,$$

$p^2=y^2\left(1-\frac{n.^4}{y^4}\right)^2$, che sviluppata e posto $90°+\theta=\theta'$, $\frac{m^2}{y^2}=v$, da

$$v^3-3v+2\ \text{sen.}\theta'=o.$$

Ciò posto dalla trigonometria (6) e (10) si ha

$$\text{sen.}\frac{2\theta'}{3}=2\text{sen.}\frac{\theta'}{3}\cos.\frac{\theta'}{3}\,,\ \cos.\frac{2\theta'}{3}=1-2\ \text{sen.}^2\frac{\theta'}{3}\,,$$

$$2\ \text{sen.}\theta'=2\ \text{sen.}\left(\frac{\theta'}{3}+\frac{2\theta'}{3}\right)=2\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}\left(1-2\ \text{sen.}^2\frac{\theta}{3}\right)+$$

$$+2\cos.\frac{\theta'}{3}2\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}\cos.\frac{\theta'}{3}=2\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}-4\ \text{sen.}^3\frac{\theta}{3}+$$

$$4\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}\left(1-\text{sen.}^2\frac{\theta}{3}\right)=6\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}-8\ \text{sen.}^3\frac{\theta'}{3}\,,$$

cioè $\left(2\ \text{sen.}^3\frac{\theta}{3}\right)^3-3\left(2\ \text{sen.}\frac{\theta}{3}\right)+2\ \text{sen.}\theta'=o$, che è identica alla dedotta facendo

$v=2\ \text{sen.}\frac{\theta'}{3}=\frac{m^2}{y^2}$, da cui si ricava la seconda delle (24), la prima poi risulta essendo $x=\frac{n.^2}{y}$.

Soluzione grafica.

Essendo BAC $=\theta$, AB $=$AC$=m$ (come in principio si è detto), facciati DAB $=90^\circ$, con centro A raggio AC descrivasi l' arco DFGC che si divida in tre parti eguali in F, e in G, congiunta FC, descritto il semicerchio FHC, presa CL $=$ CA, con descrivere l' arco AL col centro in C, elevata la perpendicolare LH, sarà HC$=x$. Con centro in C raggio AC descrivasi l' arco M, abbassata la perpendicolare MN sopra HC, sarà NC$=y$. Sicchè presa $An=$ NC, $Ah=$HC, sarà nh la partitrice ed $An+nh$ di minima lunghezza.

IPOTESI TERZA

126. **Da un dato terreno separare una data estensione quadrangolare con una retta, che sodisfi ad una data condizione.**

PROBLEMA GENERALE

Quando la somma degli angoli interni è minore di due retti.

Soluzione analitica e grafica.

Sia ABCD (*fig. 91*) il terreno dato, BC$=a$, ABC$=\tau$, BCD$=\omega$. Se $\tau+\omega=180^\circ$ questa ipotesi si ridurrà alla prima già esposta innanzi.

Se $\tau+\omega<180.^\circ$, si prolunghino i lati sicchè abbiasi il triangolo BGC, di cui è dato il lato BC$=a$, e gli angoli adiacenti $180^\circ-\tau$, $180^\circ-\omega$.

Si ha (§. 91 cas. 4.°) l' area triangolare

$$\text{BCG}=\frac{a^2\ \text{sen.}\ \tau\ \text{sen.}\omega}{2\ \text{sen.}\ (\tau+\omega)},\ \text{ovvero BCG}=\frac{a^2\ \text{sen.}\ \tau\ \text{sen.}\ \omega}{2\ \text{sen.}\tau\ \text{cos.}\omega+\text{cos.}\tau\ \text{sen.}\ \omega}$$

$$=\frac{a^2}{2\ (\text{cot.}\ \omega+\text{cot.}\ \tau)}$$, delle quali la prima meglio si presta al calcolo logaritmico, la seconda al numerico.

Posto ciò, sia FD la cercata partitrice, E l'area data di estensione FBCD, sarà lo stesso che separare la parte triangolare $FGD=E+\frac{a^2}{2(\cot.\omega+\cot.\tau)}=E'$, sicchè la quistione si è ridotta interamente alla seconda, solo che nelle formole o nelle costruzioni dei rispettivi problemi, che quella riguardano facciasi $\theta=\tau+\omega-180^\circ$, e ad E sostituiscasi $E'=E+\frac{a^2}{2(\cot.\omega+\cot.\tau)}$

Cor. 1.° Per aversi soluzione è necessario (16) che abbiasi $FG=x>BG, GD=y>GC$. Ora

$$BG=\frac{a\ \text{sen.}\ \omega}{\text{sen.}\ (\tau+\omega)},\ GC=\frac{a\ \text{sen.}\ \tau}{\text{sen.}\ (\tau+\omega)},$$

dunque le condizioni per aversi una soluzione in qualsivoglia caso sono

$$x>\frac{a\ \text{sen.}\ \omega}{\text{sen.}\ (\tau+\omega)},\ y>\frac{a\ \text{sen.}\ \tau}{\text{sen.}\ (\tau+\omega)}\ \ldots\ (25)$$

Cor. 2.° Riducasi la data area E ad un triangolo Gbc simile a GBC (Nota e), facciasi retto l'angolo BCH, e $CH=bc$, posto $BH=m$, sarà

$$m^2=a^2+(bc)^2,\ \text{onde}$$

$$E'=\frac{m^2}{2(\cot.\tau+\cot.\omega)};\ \ldots\ldots\ (26)$$

sicchè se prendasi BL=BH, si meni LM parallela a BA, MN parallela a BC, sarà il triangolo $NMG=E'$.

Cor. 3.° Se $\tau=\omega$, nella quistione seconda, a cui riducesi l'attuale, dovrà farsi $E'=\frac{m^2}{4}$ tang.ω, $\theta=2(\omega-90^\circ)$, le (25) poi a verificarsi sono

$$x>\frac{a}{2\cos.\omega},\ y>\frac{a}{2\cos.\omega}.$$

PROBL. I.

127. *L'ipotesi generale, supposta la somma degli angoli interni minore di due retti.*

Soluzione.

Sia ABC (*fig.* 92) il dato terreno, DF la cercata partitrice, $\tau+\omega<180°$, BC$=a$; tanto è separare la parte DBCF di data area$=$E, quanto la parte triangolare ADF$=$ABC$-$E.

Ora (*probl.prec.*) $ABC=\frac{a^2}{2(\cot.\omega+\cot.\tau)}$, dunque nella seconda ipotesi dovrà porsi in luogo di E la quantità $\frac{a^2}{2(\cot.\omega+\cot.\tau)}-E$, far $\theta=180°-(\omega+\tau)$.

Ridotta l'area E al triangolo *Abc* simile ad ABC (Nota *c*) descrivasi il semicerchio BGC, prendasi GC$=bc$, chiamando m la retta BG, sarà l'area triangolare a separarsi

$$ADF=E''=\frac{m^2}{2(\cot.\omega+\cot.\tau)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

identica alla (26), benchè alquanto diversamente ottenuta.

Cor. Le condizioni (25), per aversi soluzione debbono essere inverse, cioè

$$x<\frac{a\ \text{sen}.\omega}{\text{sen}.\ (\tau+\omega)},\ y<\frac{a\ \text{sen}.\omega}{\text{sen}.\ (\tau+\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Se è BDCF$=$E $>$ ABC non può aversi soluzione, sicchè occorrerà una terza condizione a soddisfarsi, cioè

$$a^2>2E\ (\cot.\tau+\cot.\omega). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

128. *Da un qualunque terreno poligono separare una data area con una retta che sodisfi ad una data condizione.*

PROBL. I.

129. *Volendo che la retta passi per un qualunque dato punto.*

Soluzione.

L'area a separarsi può esser situata in doppio senso, e per ognun di essi (da eliggersi a piacere) si procederà come segue con metodo semplicissimo.

Sia $v\,v'\,v''$.... (*fig.93*) il dato poligono, P il punto, si uniscano i vertici v', v'', v'''...con esso, sarà facile misurare le aree $vv's$, $vv'v''s'$ ec... separate successivamente (Nota *f*). Or sia la data area E compresa fra la prima, e la seconda, cioè chiamando A, A', A'', A'''.... le successive aree staccate, sia

$$A < E > A',$$

sarà facile determinare la differenza $E-A=H$, sicchè fra i punti v', v'' dovrà menarsi una retta PC, che separi l'area quadrilatera v' CD$s=H$, e quindi la quistione risolvesi come nell'ipotesi terza.

Cor. 1.° Se i lati $v'v''$, $v^{v}v^{vi}$ sieno paralleli, riducesi all'ipotesi prima (§. 117). Se $E > A$, la partitrice dovrà cadere fra v, v' e quindi separarne un' area triangolare$=E-A$, ciò che riducesi all' Ipotesi seconda.

Cor. 2.° Se il punto è sul perimetro, il procedimento sarà chiaramente lo stesso, ma se è nell' interno del terreno, per esempio in Q ha bisogno di modifica, poichè tutto diversamente dei due cennati casi, rotando la partitrice intorno a Q, mentre da una parte separa altro terreno, dall' altra s' interna in quello già appartenente a parti ottenute.

In tal caso conducasi Qm ad arbitrio (o determinata da estranee condizioni) indi Qv^{IV}, Qv^{V}, Qv^{VI}, ... sarà facile misurare le aree Qmv^{IV}, $Qmv^{IV}v^{V}$, $Qmv^{IV}v^{V}v^{VI}$ etc. . . . . che si dino-

tino con A , A', A″ (Nota *f*). Sia $A' < E > A''$, determinata la differenza $E - A' = H$, la quistione riducesi all' ipotesi seconda, cioè di separare con la partitrice QF la porzione triangolare $Q\overset{v}{v}F = H$ (§. 121).

È facile vedere come un tal metodo sia parimente con semplicità applicabile alla partizione del triangolo , dovunque sia il punto , e come siano inutili le speciali costruzioni che ne danno varii autori, le quali competono al solo triangolo, e sono diverse secondo la situazione del punto stesso.

PROBL. II.

130. *Il caso generale , volendo che la partitrice sia parallela ad una retta data.*

Soluzione.

Qui pure la parte separata può aver doppia posizione e riducesi il caso a condurre fra i successivi vertici del poligono rette parallele alla data, e vedere (Cor. 2.° probl. prec.) fra quali aree è compresa quella data. Allora, trovato l'eccesso, la quistione riducesi ad una delle tre prime ipotesi (118), (122),(126), (127).

Volendo che la partitrice sodisfi ad altre diverse condizioni , si potranno successivamente separare aree con rette che vi sodisfino , e notare fra quali sia compresa l' area data, sicchè chiaramente si ravvisa potersi sempre ridurre la quistione alla separazione di una parte triangolare o quadrangolare, al che somministrano i rispettivi mezzi le prime tre citate ipotesi.

131. *Dividere un terreno comunque poligono in un dato numero di parti, con dato ordine e proporzione, e con rette partitrici che sodisfino a svariate e rispettive condizioni.*

Si riduca tutto il poligono a triangolo (Nota *f*), e la base si divida (Nota *g*) coll' ordine stabilito nel dato numero di parti fra loro in data ragione. Congiunti i punti di divisione col vertice, i triangoli che ne risulteranno paregiano le rispettive aree a separarsi E, E', E'', E''' . . . . Or, data la condizione della prima partitrice che dee separare E, sarà facile trovarla per la ipotesi quarta nel poligono primitivo. Non considerando poi la parte E separata, resterà a staccarsi dal rimanente poligono la parte E' secondo la condizione a cui dee sodisfare la seconda partitrice. Inoltre esclusa E', si separerà E'', esclusa E'' si separerà E''', e così fino all'ultimo, ciò che non offre la minima difficoltà.

Ben si ravvisa dall' esposto che per ogni parte a separarsi converrà ricorrere a qualcheduno dei metodi analitici o grafici esposti nelle prime tre ipotesi, e diversi secondo le circostanze del parziale problema, ma la soluzione è completa, generalissima, nè ammette eccezione.

132. La novità che si osserva nella presente sezione, trattata con brevità, rigore geometrico e facilità, riducesi a tre generalissime ipotesi, cioè di separare da una data figura una parte triangolare di data estensione, una quadrilatera a due lati paralleli, od una quadrilatera qualunque e rende eseguibile la partizione di una figura qualunque in qualsivoglia caso con somma brevità e precisione. Laonde par che si rendano ora inutili i metodi speciali e complicati fino ad ora conosciuti, mentre quelli esposti nella sezione medesima par che debbano riuscir vantaggiosissimi nella pratica, evitando pure le moltiplici considerazioni che in ogni altro metodo dovrebbero tenersi presenti.

NOTE

133. Le seguenti note sono di schiarimento alla presente sezione.

Nota (a). Ordinariamente l'area E è data in un rettangolo, i cui lati possono altresì agevolmente e ad arbitrio ricavarsi se essa è data in numeri. Così se $E = 10$, i lati del rettangolo possono essere 2 e 10, ovvero 5 e 4, ovvero $\frac{5}{2}$ ed 8 ec.

Siano D,F (*fig.* 94) i lati del detto rettangolo, CAB l'angolo dato $=\theta$, $AB = a$, facciasi $AG = f$, $AH = d$, GL parallela ad HB, $MA = LA$ perpendicolare ad AB, MN parallela ad AB. Compito il parallegrammo LABO, sarà esso eguale ad E, cioè al rettangolo di F, in D.

Nota (b). Si ha (*fig.* 94) $E = (AB)(AM)$, ma $AM = (LA)$ sen.(MLA) per proprietà del triangolo rettangolo MLA, dunque posto $AB = a$, $LA = b$, $MLA = LAB = \theta$, sarà $E = ab$ sen.θ.

Nota (c). Pel teorema noto di trigonometria, cioè » il quadrato del lato opposto all'angolo acuto eguaglia la somma dei » quadrati degli altri due lati meno il doppio loro rettangolo mol- » tiplicato pel coseno dell' angolo opposto » §. 2.

Nota (d). La stessa soluzione della nota (a), solo invece di $(AG) = F$, facciasi $AG = 2F$, ed il resto procede identicamente; il triangolo cercato sarà $NAB = E = DF$.

Nota (e). Si cerca di descrivere un triangolo simile ad un'altro dato, ed equivalente ad un area E data. A tal fine sia (*fig.* 95) ABC il dato triangolo, $GHLQ = E$ il rettangolo, facciasi $BF = \frac{AD}{2}$ (essendo AD l' altezza), $HM = HL$, si descrivino due semicerchi BOC, GNH, elevate le perpendicolari FO, NM, si tirino BO, NH, OC, si prenda $BR = NH$, RS parallela ad OC fino ad incontrare il lato BC prolungato se occorra, indi menata finalmente ST parallela ad AC, sarà $TBS = E = GHLQ$ il triangolo cercato.

Infatti $(BO)^2 = (BC)(BF) = (BC)\frac{(AD)}{2} = ABC$,

$(HN)^2 = (GN)(HL) - E$, inoltre

$BO:BR::BC:BS$, $(BO^2:(BR)^2::(BC)^2:(BS)^2::ABC:E::ABC:TBS$, (perchè i triangoli son tra loro in ragion duplicata dei lati omologhi) onde $E=TBS$.

Nota (f). L'area d'un poligono si riduce ad una serie di rettangoli (che poi si posson facilmente sommare) sia colla riduzione interna, che coll'esterna anche sul foglio di disegno. Tuttavia al nostro proposito si può procedere come segue. Sia (*fig.* 96) $vv'v''v'''$ ...... v^n il dato poligono, prolungato un qualunque lato $v^n v$, congiunto vv'', menata ad essa la parallela $v'B$, sarà $vv'v''=Bv''v$ come triangoli della stessa base ed altezza comune. In tal modo il poligono di n lati si è ridotto a $Bv''v'''...v^n$ di $(n-1)$ lati. Nello stesso modo procedendo riducesi ad $(n-3)$, indi $(n-4)$ lati, e così di seguito finchè si sarà ridotto a triangolo.

Nota (g). Sia (*fig.* 97) $BC=a$ base del triangolo ABC (a cui il poligono si è ridotto). Si conduca la CD indefinita, e siano m, m', m'', ... i rapporti in numeri e nell'ordine con cui tutto il triangolo si vuol dividere. Sarà facile, con una scala numerata prendere $Cc'=m$, $c'c''=m'$, $c''c'''=m''$, $c'''c^{IV}=m'''$, ec. congiunto DB, si menino ad essa le parallele per tutti i punti di divisione della CD, congiunti i punti C, e', e''... col vertice A si avrà $ACe'=E$, $Ae'e''=E'$, $Ae''e'''=E'$ . . . e questo si avvera per facili, ed elementari ragioni geometriche.

Si prenda G medio dell' altezza AF del triangolo, si meni HL parallela a BC, elevate le perpendicolari dai punti C, si avranno le aree parziali E, E', E'' . . . . . ridotte ai rettangoli $Cc'h'L$, $e'c''h'h''$, c', c''...., ec.

PARTE QUARTA

Della livellazione, degli strumenti per la stessa e degli scandagli.

SEZIONE I.

Della livellazione e degli strumenti che si adoperano per la medesima.

ARTICOLO I.

TEORICA DELLA LIVELLAZIONE E CORREZIONE DELLE OSSERVAZIONI.

134. Dovremmo ritenere che la figura della terra sia uno sferoide di cui l' asse minore passa pe'poli, come risulta dalle calcolazioni di molti valenti fisici, dipendenti da diverse ipotesi e considerazioni e particolarmente dall'applicazione della teoria de'pendoli e dalle misure dei gradi di latitudine presi in luoghi tra loro distantissimi; ma poichè, adottando la media tra le diverse ipotesi, per altro tutte cospiranti tra loro, troviamo essere la differenza tra'l semiasse equatoriale e'l polare appena di $\frac{1}{310}$, co-

si potremo questa considerare come nulla e ritenere per gli usi Geodesici la mole della terra essere di figura sferica. Però per le irregolari cavità e disuguaglianze della sua superficie alcuni punti della stessa debbon trovarsi più che altri distanti dal suo centro, ad esclusione di quelli appartenenti alla superficie del mare i quali, per la perfetta mobilità del fluido e per la gravità generale, debbon tutti trovarsi equidistanti da quel centro delle forze dal quale sono egualmente attirati del pari che ogni altra molecola che compone il fluido medesimo.

I diversi punti adunque del continente riferiti a questa superficie potrebbero venir determinati in quanto alle distanze loro dal centro della terra e conoscersi le differenze di altezze de'medesimi dalla detta superficie, che però tali differenze diconsi *differenze di livello*, la superficie del mare dicesi *superficie di livello vero*, e *livellazione* dicesi *quella scienza che ha per oggetto la ricerca della differenza delle distanze di due o più punti dalla superficie delle acque stagnanti, ovvero di altra a questa concentrica o, che è lo stesso, dal centro della terra.* In altri termini, *serve a riferire la posizione di più punti ad una data superficie di livello, assegnandone l'elevazione o depressione di ciascuno rispetto a quella superficie.*

Qualunque piano s'intenda disteso tangenzialmente uno de'punti di una delle superficie di livello, sarebbe un orizzonte sensibile che dicesi *piano di livello apparente*, e tutt' i punti di tal piano diconsi *di livello apparente.*

Intanto, perchè l'è ben naturale che le visuali dagli occhi nostri si partano a' diversi oggetti nella direzione rettilinea come si diffonde la luce, così si è stabilito avvalersi di questa seconda anzichè della prima superficie di livello, mentre per aversi le visuali o linee di livello apparente, che sieno cioè tangenti la superficie di livello vero, si fa uso di diversi strumenti de'quali or ora parleremo.

155. Perchè però riferiti a questo piano non si otterrebbero le vere differenze di livello, così è necessario corriggere la differenza di livello osservata tra due punti, se la loro distanza però sia superiore a 5 o 600 metri, sia dall'errore dipendente dalla sfericità della terra che da quello della refrazione.

Per la visuale orizzontale che offre un livello piazzato in A (*fig.* 98) si vegga il punto B' di un asta di mira elevata in O.

Se si descrivano gli archi AF, Oa col centro C della terra e co' rispettivi raggi CA, CO si avrà

$$\left(\begin{matrix}\textit{Differenza}\\ \textit{del livello}\\ \textit{vero}\end{matrix}\right) \text{ cioè } OF = \left(\begin{matrix}\textit{Differenza}\\ \textit{di livello}\\ \textit{apparente}\end{matrix}\right) \text{ cioè } OB' - FB' \ldots (a)$$

Ma il punto che si osservava io B' per l'effetto della refrazione non era che in B; onde la differeoza di livello apparente a determinarsi non è che una certa luoghezza OB; per modo che si ha $OF = OB - FB = OB - (FB' - BB')$ cioè

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Differenza}\\ \textit{di livello vero}\end{matrix}\right\} \doteq \left\{\begin{matrix}\textit{Differenza di livello}\\ \textit{apparente}\\ \textit{dato dalla mira}\end{matrix}\right\} -$$

$$-\left\{\left[\begin{matrix}\textit{Correzione}\\ \textit{di}\\ \textit{sfericità}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}\textit{Correzione}\\ \textit{di}\\ \textit{refrazione}\end{matrix}\right]\right\}$$

Calcoliamo ora queste due specie di correzioni.

1.° Ammettendo, ciò che è permesso nel caso attuale, che $AB' = AF$, dal triangolo rettangolo B'AC si trae $(CF + FB')^2 = CF^2 + AF^2$; d'onde, trascurando la seconda potenza di FB' nello sviluppo del binomio, e ponendo $AF = K$, $CF = R$ si ha

$$\text{Correzione di sfericità} = \frac{K^2}{2R}$$

Questa quantità esprime, come lo indica la relazione (a) *la differenza fra il livello apparente e 'l livello vero di due punti.* Essa si eleverebbe già di o ^{m}, 314 per una distanza di 2,000 metri.

Per determinare l'espressione di BB', noi osserveremo che l'angolo $FAB' = \frac{1}{2}\ C$, come formato da una tangente ed una corda, e che quello che è prodotto per la refrazione ha per valore $BAB' = r = nC$ (*) per essere r proporzionale a C. Essendo entrambi estremamente piccoli, può supporsi che gli archi che si misurano sieno proporzionali alle lunghezze FB', BB', e farsi

---

(*) Replicate ed accurate osservazioni hanno dato per questo coefficiente n della refrazione, $n = 0,08$. Diverse circostanze influiscono sul suo valore, come la temperatura e la pressione atmosferica di cui non può tenersi alcun conto nel calcolo. Vedi Bégat Géodésie 1839.

$$\frac{\frac{1}{2}C}{nC} = \frac{FB'}{BB'} \text{; d' onde}$$

Correzione di refrazione$=2n\times$Correzione di sfericità.

Per conseguenza

$$\textit{Diff.}^a \text{ di livello vero} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Diff.}^a \text{ di livello apparente} \\ \text{data dalla mira} \end{array} \right\} - \frac{1-2n}{2R}K^2$$

Il logaritmo del coefficiente di K^2 è, prendendo per R il valore del raggio medio della terra (**) e supponendo $n=0,08$;

$$\log.\frac{1-2n}{2R}=2,8193350$$

Se or vogliasi, per mezzo di una visuale orizzontale, l' altezza del punto O al di sopra di un altro D, si vedrà a qual punto dell' asta di mira elevata al primo corrisponde la visuale orizzontale che offra un livello piazzato al secondo, onde conoscere l' altezza $OB=b$. Si misurerà di più l' elevazione $AD=a$ del livello al di sopra del suolo in D, poi si calcolerà il valore del termine

$\frac{1-2n}{2R}K^2$, relativo ad $OD=K$, finalmente si sostituiranno queste diverse quantità nell' equazione

$$dL=\left\{\begin{array}{c}\text{altezza del}\\ \text{livello al di}\\ \text{sopra del}\\ \text{suolo ov' è}\\ \text{piazzato}\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c}\text{altezza della}\\ \text{mira dal}\\ \text{punto d' in-}\\ \text{contro con}\\ \text{la visuale}\\ \text{orizzontale}\\ \text{dal suolo}\end{array}\right\}-\left(0,00000066K^2\right);$$

e secondo che questa quantità sarà positiva o negativa, il punto ove si trova la mira sarà al di sopra o al di sotto di quello ov' è piazzato il livello.

136. Per una distanza di 500 metri, l' ultimo termine di questa formola non si eleverebbe che a $0^m,0165$ §. 135.

(**) Il diametro medio 2R della terra è uguale a metri 12732395.

Scol. Il Chiariss. *G. Venturoli* ne' suoi elementi di Meccanica trova per la correzioue totale complessiva della sfericità e della rifrazione la formola $\frac{6.\ K^2}{7.\ 2R}$ che corrisponde a quella di sopra esposta con la differenza di circa un centesimo, che però basterebbe scemare la correzione di sfericità di un settimo in causa della rifrazione per maggior semplicità, trascurando però piccolissimo errore.

ARTICOLO II.

DEGLI STRUMENTI CHE SI ADOPERANO PER LA LIVELLAZIONE.

137. Non parleremo nel presente articolo di quelli strumenti poco usitati, come quelli descritti dal Riccioli, dal Leupold, o quelli di cui il Picard ha data la descrizione nel suo trattato della livellazione ed altri di Roemer, de la Hire, Mariotte, Huygens, Para e dello stesso Picard, che venne pur rettificato dal signor Liesganig, come si rileva dal corso Matematico del signor Scherffer, sebbene quelli in uso di cui parleremo sien da' primi derivati e poi migliorati e perfezionati. Gli ultimi due celebri uomini l' Huygens ed il Picard sono stati i primi a portare nelle operazioni geodetiche la stessa precisione che nelle astronomiche, permettendo una lunga visuale con cannocchiali e fissando la linea di traguardo con l' intersezione di due sottilissimi fili posti nel foco dell' oggettiva e mediante un piccolo foro praticato nel mezzo di una lastra metallica onde coprir l' oculare.

137. DELL' ASTA DI MIRA. L'asta di mira si accompagna a tutti gl'istrumenti da livellazione nell'adoperarli. Si compone di un asta AB (*fig. 99*) di altezza palmi 7, 50 e circa decimi 3 di larghezza che ha nel senso della sua lunghezza una scanalatura per la quale può scorrere dolcemente un' altr'asta di eguale altezza, entrambe graduate in palmi e sue divisioni per modo che, coincidendo i loro estremi, coincidono del pari le linee delle divisioni. La CD porta, per mezzo di una grappolina, una *mira mn* che è una lamina metallica rettangolare di un palmo di lunghezza per 0, 60 di palmo di altezza, divisa in quattro uguali rettangoli mediante due linee pe'punti medii de'lati opposti e dei quali due in diagonale sono tinti in rosso ed i rimanenti in bianco. La linea *mn*, che dicesi *linea di fede*, è quella cui deve dirig-

gersi il raggio visuale che si offre dagli strumenti da livellazione a descriversi.

Se dunque il raggio visuale supererà l'altezza della riga, si eleverà la mira, sollevando la riga CD, per mezzo di un bottone O, all'altezza che fa mestieri ed al segno di convenzione che farà l'operatore, si fermerà ogni movimento mediante la vite di pressione E, leggendo di poi sulla riga alla linea A*a* l'altezza in cui la linea di fede della mira si troverà elevata dal suolo.

Se il raggio visuale condotto dall'istrumento vada ad incontrare la mira in sito più basso della sua altezza sul punto osservato, sarà d'uopo capovolgerla, ed essendosi certo che debba per tutta l'operazione aver luogo tale condizione, come nel caso di livellare terreni poco inclinati, come una piazza, un cortile ec. si potrà usare addirittura una mira più semplice composta solamente della riga AB e della mira *mn* che possa scorrere per la sua lunghezza e fermarsi ove conviene mediante una vite di pressione.

Se inoltre il punto da osservarsi sia più alto di quello di stazione, bisognerà far piazzare la mira in un punto circostante nel quale possa trovarsi alquanto più bassa della linea di livello.

L'asta di mira ha dietro di se una livella sferica, stabilita in modo che, quando la bolla è al segno, l'asta si trovi verticalmente disposta onde non incorrere nell'errore di verticalità che produrrebbe una deviazione nell'altezza osservata sulla mira.

138. LIVELLA DI PENDIO. Questo strumento, molto semplice e di uso comunissimo vien detto pure *squadra da muratore* o da *carpentiere* è rappresentato dalla fig. 101 e consiste in una squadra di legname EAF di cui le braccia uguali AE, AF che per lo più sogliono inclinarsi ad angolo retto poggiano su di un listone orizzontale, e sono mantenute ferme per mezzo di un asta trasversale CD parallela alla EF. Un filo a piombo, sospeso dal punto A, deve coincidere con un tratto segnato in B, che dicesi *linea di fede*, quando gli estremi E, F poggiano su di una linea di livello, e però dicesi pure *livello a perpendicolo*, al contrario quando il filo coincide con la linea di fede è chiaro che la linea EF è linea di livello. Invece della CD talvolta evvi un arco di cerchio col centro in A e con una graduazione che procede dall'una e l'altra parte del suo mezzo ov'è il zero di

essa. Applicando le uguali braccia AE, AF di questo livello su di un piano inclinato, ovvero se lo stesso sia montato su di un piede a ginocchio, traguardando per la E F gli eguali segnali che si stabiliscono a' termini di un pendio, il filo a piombo anzichè battere il punto B, toccherà altro della graduazione, allora l' angolo che dallo stesso verrà indicato sarà visibilmente quello che la EF fa con l' orizzonte. Può dunque determinarsi il pendio di un terreno, e dare al medesimo le pendenze che si vorranno. Vien detto pure per tal riguardo questo strumento anche *ecclimetro*.

139. LIVELLA AD ACQUA. Dicesi pure *a sifone* ed è il più semplice di tutti gl' istrumenti da livellazione. Esso (*fig.102*) offre la linea o visuale di livello per due superficie di un fluido in un tubo ricurvo, mentre le medesime per legge idrostatica debbon trovarsi sempre in un piano di livello. Il detto tubo è cilindrico di ferro bianco o di rame, ripiegato negli estremi ad angolo retto per due eguali porzioni nelle quali vi sono immessi due tubi di purissimo cristallo, di eguali diametri e vuoti in ambi gli estremi, affin di potersi traguardare la superficie del liquido di che viene ripieno.

Il detto tubo viene sostenuto nel punto medio da un piede a ginocchio, come quello della plancetta, ovvero da un tronco conico terminato a prisma triangolare intorno al quale sono avvitate tre gambe, in modo che lo strumento può ricevere qualunque inclinazione.

Per l' esattezza del livello è da procurarsi che nel fluido non si formi alcuna bolla d' aria, mentre la differenza del peso specifico non permetterebbe l' equilibrio di due uguali masse di fluido; ad evitare ciò s' inclini il tubo in modo che la colonna fluida sia presso a poco verticale, turando l' estremità inferiore del medesimo ed allora l' aria che potrebb' esservi compresa ne uscirà per l' altro estremo. Poichè intanto, per la teorica dei fluidi ne' tubi capillari, si sa che per l' azione del peso e dell' attrazione delle pareti de' medesimi co' liquidi di che sono ripieni supera quella del fluido su se stesso, succede che ciascuna delle superficie del fluido non è piana, sibbene concava, ed è perciò che i tubi di cristallo sogliono farsi di eguali diametri, e però il livellatore dovrà far passare la sua visuale pel bordo destro dell' una superficie e pel sinistro dell' altra, mettendosi

di più alquanto distante. Per meglio distinguere le superficie è bene usare un liquido colorato. Per esaminare se esista la verticalità dell' asse di rotazione si fa girare l'istrumento intorno ad esso e se ciò abbia luogo le superficie del liquido dovrebbero permanere nella loro posizione, mentre in caso contrario le superficie orizzontali che si otterranno, facendo girare l' istrumento sul suo piede, si troveranno in differenti piani.

Tale istrumento non può adoprarsi per le grandi distanze ed ha bisogno di grande pratica ed attenzione per ottenere col medesimo esatti risultamenti. Ne' siti molto freddi, ond' evitare il congelamento dell' acqua si fa uso di alcool. Nel trasporto di esso da una ad altra stazione giova con due coperchi impedire l' esito del liquido.

Volendo però operare con celcrità e precisione e più indicato l' uso della *livella a bolla d' aria di Chézy*.

140. LIVELLA A BOLLA D'ARIA. Quest'istrumento è quello da noi già cennato al §. 37. Desso ha recato i principali vantaggi alla livellazione. Immaginato dal signor Thèvenot verso il decadere dell' anno 1666 e dallo stesso pubblicatane la descrizione non pria del 1682, ha di poi ricevuto man mano varie modificazioni e perfezionamenti, onde usarlo isolatamente per la livellazione. Si aggiunsero agli estremi della riga EF (*fig. 103*) due traguardi ad essa normali in ciascuno de' quali un' apertura rettangolare divisa da due fili in croce, la quale può chiudersi mediante una lamina di metallo con un forellino in mezzo, facendola scorrere per due incastri laterali con apposite viti di richiamo. Un'altra riga GH sta collegata sotto l'altra EF con un estremo a cerniera e con l' altro mediante una vite di richiamo K per la correzione. L' estremo superiore di un piede a tre gambe vien conficcato in un cilindro vuoto di ottone fermato sotto la riga GH, e sostiene così l' istrumento.

È d' uopo che il raggio visuale, che deve passare pel foro della lamina che chiude una delle aperture e per l' incrociamento de' fili nell' altra, sia parallela alla linea della livella corretta: or per verificare se ciò si avveri, si porti la bolla in mezzo e, traguardato un lontano scopo, si giri sul suo piede l' istrumento e per la parte opposta si traguardi l' oggetto medesimo il quale, se non si vegga, si faccia rientrare nella direzione della visuale, rimovendo con le corrispondenti viti i telaretti de'fili e le lamine rispettive.

141. LIVELLA A BOLLA D'ARIA DI CHÉZY. Quest'ingegnere francese perfezionò con tanta semplicità tale strumento da renderlo il migliore e più adottabile di tutti gli altri in tal genere, volendosi eseguire lunghe e delicate livellazioni. Desso, migliore della livella a cannocchiale galleggiante di Mariotte e di quella a traguardi galleggianti di Lahire ec., è quale ci facciamo a descrivere. Il suo pezzo principale (*fig.104*) è un piccolo livello a bolla d'aria *ab* sospeso ad un cannocchiale acromatico AB da ambo gli estremi da uno de' quali, mediante un piccolo perno, e dall'altro da una vite che può farla lievemente muovere nel senso verticale. Il regolo *cd* alle cui estremità si elevano due sostegni del detto cannocchiale tiene nel punto medio O collegato a cerniera un gambo, che però sostiene l' intero istrumento essendo inferiormente ficcato in un piatto P fisso con tre viti ad un tripede. Un arco *ef* agli estremi del quale stanno ferme due branche *ec*, *fd* forma col regolo un pezzo. Un *moto pronto* si può imprimere all' intero sistema nel senso verticale o in quello orizzontale, facendolo rispettivamente girar con mano intorno l'asse O di rotazione, o nel foro P del piatto orizzontale, quale ultimo moto può impedirsi mediante la vite di pressione S ed i movimenti capillari ne'sensi medesimi si danno rispettivamente con la vite perpetua Q che ingrana nella madrevite formata nel bordo inferiore dell'arco *ef* o con la vite di richiamo R.

Per l' esattezza dell'istrumento si richiede: 1.° che l' asse ottico del cannocchiale passi pel centro dell' oculare, per l' intersezione de'fili a croce del telarino, come quelli indicati al §. 39 e che coincida esattamente con l'asse del cilindro del cannocchiale; 2.° che l' asse ottico di questo sia rigorosamente orizzontale e parallelo alla linea di livello del tubo a bolla d' aria.

Per verificare la prima condizione si fissi fermamente l' istrumento sul terreno, ed alla distanza di un 300 metri §. 136 si stabilisca una qualunque linea orizzontale e si traguardi col cannocchiale in modo che venga occultata dal filo orizzontale del telarino, e se, traguardando nuovamente lo scopo medesimo, fatta fare una semirivoluzione al telarino, si trovi lo stesso alquanto discosto dal filo orizzontale nel senso verticale, bisognerà farvelo corrispondere, facendogli percorrere metà dello spazio con la vite corrispondente del telarino e l' altra metà dall' istrumento mediante la vite *senza fine* Q. Si ripeterà più volte la stessa corre-

zione fino a che il filo orizzontale si troverà nascondere la linea di mira prima e dopo del rovesciamento del telarino.

Del pari operando, senza muovere l'istrumento, è facile corriggere il filo verticale stabilita del pari una linea alla prima normale e procurando il combaciamento metà con la vite R e metà con la corrispondente del telarino. Sl troverà questo filo nel piano che passerebbe per tutt' i diametri verticali del corpo del cannocchiale ed il filo orizzontale in quello che passerebbe per tutt'i diametri orizzontali del medesimo : per lo che il raggio visuale, passando pel centro dell'oculare e per intersezione de'fili del telarino, si confonderà con l'asse stesso del cannocchiale.

Per verificare la seconda condizione, cioè per fare che l'asse ottico del cannocchiale sia orizzontale allorchè la bolla è nel mezzo del livello, è sufficiente porre prima in mezzo la bolla mediante la vita Q e di poi estremo per estremo girando il cannocchiale su' suoi sostegni, (che però sono a cerniera) dovrà trovarsi la bolla nella stessa posizione, altrimenti vi si riduca per una metà del deviamento con la vite medesima e pel resto con quella in *a*. Questa operazione si ripeterà fino a che si avveri per qualunque delle due posizioni del cannocchiale la condizione richiesta. S' intende ora troppo facilmente come sarebbe a corrigersi rispetto alla seconda indicata condizione anche nel caso che la livella a bolla d'aria sia sul regolo *cd* anzichè unita al cannocchiale.

Verificato e corretto così l'istrumento resta solo nell'usarlo a piazzarlo in modo che il piattino sia orizzontale, mentre elegantemente vien dimostrato da M. Busson che allorquando desso l'è inclinato all'orizzonte, i diversi assi ottici orizzontali che si ottengono, facendo muovere dolcemente ed orizzontalmente l'istrumento non sono tutti nello stesso piano orizzontale, ed i loro abbassamenti o le loro elevazioni sono in ragion composte dell' angolo del piattino con l'orizzonte e della distanza dal centro di rotazione C a ciascuno degli assi ottici. Nella pratica non è assolutamente necessario tener conto di questi abbassamenti, poichè l'è soventi minore degli errori stessi delle osservazioni, è però interessante che il gambo sia quanto più è possibile verticalmente disposto. È però questo l'unico e troppo leggiero difetto di questo strumento semplice nella sua costruzione è sommamente pregevole.

La sensibilità della livella limita la portata dagli strumenti di livellazione di cui fa parte, e dessa dipende dal raggio di curvatura. Nella livellazione però al contrario che negl' istrumenti astronomici l' esperienza ne dimostra essere piuttosto nociva non soverchia sensibilità della livella. Si deve però all' abile Chézy la perfezione di alcuni tubi a bolla d' aria costruiti con un raggio di curvatura di 413 a 619 metri che producono un movimento della bolla di 2 ed anche 3 millemetri per ciascun secondo di grado d' inclinazione. L' è dunque mestieri nelle accurate livellazioni, attenersi a portate tali da evitare gli errori dipendenti dalla livella mentre si eviteranno così pur quelli dipendenti dalla molto variabile refrazione atmosferica.

Può facilmente calcolarsi l' errore per ciascun colpo di livello dipendente dalla osservazione della posizione della bolla e dalla sensibilità del tubo; ma poichè questo è sempre tanto insignificante da non doversi sperare di evitarlo, diciamo invece che quantunque la portata varia a secondo dell'istrumento e dell'importanza della livellazione, pure come limite delle grandi portate può ritenersi la distanza di 300 od al più 350 palmi non ostante alcuni ritengano quella di 500 e più.

Il signor Egault ed il Colonnello signor Emy hanno modificato tale strumento; il primo ha ovviato al difetto di verticalità dell' asse, avvicinandolo maggiormente al cannocchiale, e il secondo ne ha cambiato gli appoggi situando al di sopra di esso la livella, ove essendo sostenuta pe' soli due punti estremi, può girare intorno di essi, e rendere sempre visibile la bolla ed ha inoltre sostenuto l' istrumento con una breve colonna poggiata su di un piano formante tre braccia eguali avente ciascuno una vite all' estremo ad oggetto di corriggere e rettificare l'istrumento. Trascurando di tener discorso della *livella a Cerchio* di *Lenoir* per la rimarcabile imperfezione che la sua esattezza dipende da quella di due prismi metallici su quali si poggia il cannocchiale, passiamo invece a parlare della

142. LIVELLA DI PENDIO DI CHÉZY. Questo strumento (*fig. 105*) immaginato dallo stesso distinto ingegnere Chézy, è destinato per determinare la quantità d' inclinazione od il pendio di una linea all' orizzonte. Una riga AB della lungezza di un piede sulla quale sta fermamente e parallelamente disposto un livello a bolla d' aria, tiene nella parte sottoposta collegata un' altra riga CD con

un estremo a cerniera e con l' altro mediante una vite onde corriggere l' istrumento e stabilire al segno la bolla. Agli estremi della prima riga sono ad angolo retto elevati due telaretti di eguale larghezza, ma uno alto 21 linee e l' altro 48, in ciascun di essi può muoversi, scorrendo per due incastri laterali una lamina metallica, ognuna delle quali ha verso un lato un incavo rettangolare diviso da due fili in croce e verso l' altro un piccolo foro di forma conica col vertice in fuori d' onde si traguarda ed in modo però che il foro di una delle lamine corrisponde all' intersezione de' fili nell'altra.

Le viti a,b danno il detto moto alla lamina più corta per rettificare l' istrumento, e la vite perpetua c procura il movimento dell'altra. Questa livella di pendlo si fonda su di una proprietà dei triangoli simili; mentre se si supponga orizzontale ed elevata di una quantità n la lamina fr onde fare che il raggio diretto pei punti q, o' vada ad incontrare altro del terreno più elevato alla distanza n', è chiaro che conoscendosi la lunghezza a del regolo e chiamando m' l' elevatezza del punto sul livello dell' altro O alla distanza anzidetta n', sarà $m'=\frac{n\,n'}{a}$. Che però, stabiliti prima nel piano orizzontale i punti q,o', e segnata verso il basso del lato co della lamina una lineetta x che dicesi *linea di fede* ed altra in continuazione sul corrispondente lato del telarino marcata col zero, si segni da tal punto in sopra su detto lato una graduazione qualunque in parti eguali ad una, determinata con anticipata esperienza dal piccolo sollevamento della linea di fede, procurato per mettere il punto M nella visuale inclinata, diretta all' estremo superiore di una certa altezza fatta elevare verticalmente al termine di una certa distanza.

Laonde è chiaro che per diverse inclinazioni le quali secondo la rapidità del suolo si dovranno dare al raggio visuale, facendo coincidere la linea di fede con alcuno de' tratti della graduazione, potranno farsi note a determinate distanze le proporzionali altezze che si dimandano de'punti osservati sul terreno medesimo; però si rileva che dovrà farsi uso del forellino q, o dell'altro q', secondo che il punto traguardato si trovi più o meno elevato di quello di stazione, nè deve trascurarsi di tener conto dell'altezza del foro sul terreno al punto di stazione.

Del pari, volendo tracciare sul terreno una linea di data inclinazione, si situerà nel punto di partenza l'istromento e, data ad una mira la stessa altezza che ha il forcllino del piccolo traguardo sul terreno, si farà coincidere la linea di fede col grande traguardo sulla divisione dinotante il chiesto pendìo, e si porti la mira dall'uno all'altro lato, fino a che la sua linea di fede, venga incontrata dal raggio visuale: il punto in cui allora troverassi piazzata la mira apparterrà al cercato pendìo.

Che se sia dato l'allineamento secondo cui debba operarsi, è chiaro che l' elevazione od abbassameoto della mira, preparata come sopra si è detto, che avrà luogo per corrispondere al raggio visuale assegnato di direzione, indicherà l'altezza del riempimento o del tagliamento che dovrà ricevere il terreno per trovarsi nel dinoandato pendìo.

Diverse modifiche ha ricevuto questo strumeoto dall' ingegnere francese, signor Lefranc; ha egli incastrata la livella nel senso longitudinale in una riga di legno che ha sostituito a quella metallica AB le ha però assegnato la lunghezza di circa palmi 2 e la larghezza di 0,1 di palmo. Al gran traguardo ha sostituito una riga quadrata in cui ha segnata la graduazione munita di un nonio, e questa, lungo la quale può scorrere la mira che stava nel telaretto del detto traguardo, traversa l' altra riga AB, prolungandosi al di sotto della stessa, per modo che la graduazione puol essere quanto si voglia estesa. Ha stabilito l' oculare di un de' traguardi ad una costante distanza dal suo bordo superiore, facilitando così l' osservazione.

Finalmente ha affidato ad una più corta verga l'altro traguardo che mediante una vite sotto la riga può ricevere le piccole correzioni.

Il piccolo costo di questa livella di cui la più parte de' pezzi possono essere di legno onde rendesi pure molto leggiera, l' è anche un pregio da considerarsi nella medesima.

143. ECCLIMETRO. Agli estremi di una riga AB *(fig.106)* stanno fermi nell'istesso lato e nel piano medesimo due archi di cerchio graduati, ciascuno de'quali ha il centro nell'estremo opposto della detta riga nel puoto medio della quale può intorno d'un perno girare un'altra *ab* combaciante con la prima, munita di due nonii per valutare le piccole frazioni della graduazione e per mezzo di due

collari c,d, sostiene un cannocchiale che ha la retina come quella che descrivemmo parlando *della stadia*.

La prima riga sostieoe una livella a bolla d' aria nel modo eome si è detto al §. 141, oode poterla rendere parallela alla linea che passa pe' punti o, e 180 della graduazione, la vite di richiamo *o* serve per portare l' oggetto a traguardarsi sull'intersezione ceotrale de'fili, mentre una vite di pressiooe può fermare tal movimento del cannocchiale. Finalmente un altra vite di richiamo procura all' iotero strumeoto un moto nel scoso verticale per orizzootare la detta lioea tra' punti o, e 180. ed io tal posiziooe la livella deve trovarsi con la bolla in mezzo. Da ultimo tutto questo meccanismo si adatta ad uo dei lati della bussola (§. 34) formando così la *bussola ad eeclimetro*.

L' ecclimetro è destinato per la determinaziooe delle distanze zenitali di cui si dimandano le altezze.

Devesi però pria di usarlo corriggere dal, così detto, *errore di collimazione*; cioè deve conoscersi il valore dell' angolo che il raggio visuale suol quasi sempre fare con l'orizzonte oon ostante si trovi a segoo la livella c 'l zero del nonio io coincidenza con quello del lembo.

Suol corriggersi questo errore paragonandolo con l'osservazioui coniugate risultanti da uo *cerchio ripetitore*, più esatto strumento geodetico, o calcolaodolo per mezzo delle distanze zenitali reciproche, o finalmente col metodo esposto dal Capitano delio Stato maggiore francese signor Hossard che consiste nel misurare successivamente i due angoli che la verticale forma nel puoto di stazione con la visuale diretta dal centro dell'istruioento al puoto traguardato; lo che può farsi prontamente, misurando con l' ecclimetro la distanza zenitale di uo punto qualunque, traguardando lo stesso senza spostare la bolla, dopo aver fatto girare io senso diametralmente opposto l' istrumento; meotre la metà della differenza di 180.° sulla somma degli angoli osservati eguaglierà il valore di quello cercato.

Corretto, come veniam di dire, l'istrumento ed orizzontatolo convenevolmente, si dirigga il caonocchiale al punto di cui si dimanda l' elevazione o depressione sul livello di quello di stazione, o la sua distanza zenitale e ciascuoa di queste cose sarà sempre rappresentata dall' angolo emergente sulla graduazione. Si noteranno però con ordine in un registro tali osservazioni nel quale

saran pure indicate in diverse colonne le distanze orizzontali, i nomi delle stazioni, i punti osservati e gli angoli orizzontali.

144. La costruzione della bussola ad eclimetro è stata modificata di molto nel nostro Reale Officio Topografico, e crediamo giusto di esporne concisamente la descrizione.

La bussola (*fig. 107*) può ricevere un movimento traslatorio mediante due traverse di sotto scanalate, tra le quali può scorrere una tavoletta. Le viti *v*,*v*,*v*, servono ad orizzontarla, potendo entrare nelle corrispondenti madreviti sul piano AB del piede a tre gambe. La vite *c* da i movimenti orizzontali e capillari alla bussola e finalmente può fermarsi l' intero sistema, stringendo una vite a chiocciola all' estremo inferiore dell' asse verticale *q* mentre la vite *o* ferma solo la bussola sul piede. Ad un de' lati della bussola medesima si adatta verticalmente il piano di un cerchio graduato che può dare fino a 2 minuti primi sessagesimali; a piccola distanza può muoversi col nonio il descritto canocchiale, e questo ha la vite di richiamo *b*, altra di pressione e quella *r* che serve per allungare od accortare il tubo oculare. Un microscopio *h* può portarsi in qualunque punto della graduazione e finalmente una livella *st* sta piazzata tra 'l piano del lembo e 'l lato della bussola.

145. CLISIMETRO DI BURNIER. È molto semplice questo strumento; ma molto meno esatto de' precedenti che riguardano, come questo la ricerca dell' inclinazione di una linea all' orizzonte.

In un punto medio dell' altezza del fondo di una cassettina rettangolare, vuota e verticale, sta bilicato un' ago magnetico il quale, mantenendosi sempre in posizione orizzontale può indicare i diversi punti di una graduazione segnata in un arco che ha per centro il punto di sospensione dell' ago, e sta nella detta cassettina presso un de' suoi lati verticali, col zero nel suo punto di mezzo. Tale cassettina può ricevere sul suo piede un movimento nel senso verticale, per modo che l' angolo indicato dall' ago orizzontale con la visuale che si fa passare per due intaccature praticate ne' punti medî de' lati verticali, sarà l' angolo cercato.

146. LIVELLA A RIFLESSIONE DI BUREL. Il signor Burel Colonnello del genio francese diè notizia dell'invenzione da lui fatta di tale strumento nel 1826 ed eccone succintamente la descrizione. Uno specchio metà amalgamato sopra una faccia e metà sull'altro di figura ret-

tangolare di altezza uo palmo e di larghezza mezzo palmo sta, con due fili di seta paralleli, sospeso alla parte superiore di un tubo di rame aperto superiormente ed avente lateralmeote due opposte fenditure onde vedere la superficie riflettente. Piazzato in un punto la mira e portata la linea di fede nella direziooe dell' immagine riflessa dell' occhio dell' osservatore la visuale corrispondente sarà com' è chiaro linea di livello, essendo verticalmente disposto lo specchio.

Laonde la differenza di livello tra l' altezza indicata dalla mira e quella dell' occhio dell' osservatore sul terreno, sarà la differenza di livello del punto osservato su quello di stazione e quindi si rileva che la differenza di livello di due punti osservati da uoa stessa stazione si avrà dalla differenza dell' altezze indicate dalla mira ne' punti medesimi.

La correzione di tale strumento può aver luogo, facendo due apposte osservazioni a' punti di eguale livello antecedmente stabiliti sul terreno.

Questa è però una delle così dette *livelle a mano* utili per le riconoscenze militari, per le quali si richiede sollecitudine nell' operare e la facilità di poterle trasportare. Oltre a questa livella però ve ne sono delle altre di cui fanno uso specialmente gli uffiziali dello stato maggiore, e delle quali noi per semplice notizia indichiamo le seguenti due.

147. LIVELLO DI HOSSARD. Questo distinto capitano francese immaginò questa livella a mano che consiste in due tubi di vetro di eguali diametri e ciascuno di mezzo centesimo, di altezza ciascuno tre quarti di palmo paralleli fra loro e congiunti normalmeote da due altri tubi alquanto più stretti; ed io comunicazione co' primi. Tali tubi per la metà della loro capacità sono riempiti di alcool e son custoditi tra gl' incastri di due tavolette collegate tra loro a cerniera.

148. LIVELLO DI COUSINERY. Questo livello altro noo è che uo ben levigato cilindro di acciaio liberamente sospeso e però con l' asse verticale, sulla sua superficie si fa riflettere un quadrato di carta bianca, ed allora si avrà un piano orizzontale quando la parte superiore della carta si vedrà coiocidere con quello della sua immagioe sul ciliodro medesimo.

ARTICOLO III.

DIVERSE SPECIE DI LIVELLAZIONI E MODO DI ESEGUIRLE

Livellazione di un' allineamento.

149. Distinguonsi due specie di livellazioni, *semplice* e *composta* secondo che basti una sola stazione o molte successive.

Esempio di una livellazione semplice.

150. Vogliasi conoscere la differenza di livello di due punti A,B (*fig. 108*) tra loro visibili. Si piazzi l'istrumento nel mezzo della loro distanza, ed è tal posizione quella che rende più semplice ed esatta l'operazione; mentre risulta dal §. 136 e prec. che non volendo tener conto della correzione della sfericità e della refrazione, l'è d'uopo, allorchè le mire sono lontane più di 1000, o 1200 metri, piazzare il livello verso il mezzo dello spazio che li separa, anche perchè in tal posizione tutti gli errori anzidetti, non dipendendo che dalla distanza, si ha che a distanze uguali commettendosi eguali errori e nello stesso senso, non si altera la posizione rispettiva de' termini livellati e quindi non evvi bisogno di alcuna correzione, ma se riesca più comodo per le locali circostanze sarà indifferente piazzarlo in uno de' due punti o finalmente fuori di essi in un qualunque punto dell' adiacente terreno, mentre non è necessario che la visuale orizzontale che offre l' istrumento si trovi nel piano che passi per le verticali de' due punti, essendo sempre la visuale medesima in un piano orizzontale (§. 134).

Supposto intanto, come si conviene in una livellazione semplice, che i punti dati non si trovino in piano molto inclinato, e fatta piazzare la mira in uno de' punti A verticalmente, si diriggа a questa mediante l' istrumento situato p. e. in un punto medio C il raggio visuale, e con segni convenuti si faccia alzare od abbassare lo scopo della medesima finchè nel mezzo di questo v' incida il raggio anzidetto e si osservi l' altezza di tal punto medio dal terreno. In uno schizzo nel quale sia segnata un orizzontale dinotante la linea di livello e le perpendicolari a questa che indichino le verticali che passano pe' punti osservati, si

segni presso quella che corrisponderebbe al punto A l'altezza trovata. Senza muovere l'istrumento si traguardi la mira che siasi fatta trasportare in B e si segni del pari nello schizzo, presso la perpendicolare che indica la verticale per tal punto, l'altezza del punto medesimo dal piano orizzontale adottato.

La prima osservazione fatta al punto A si dirà *osservazione a destra* e quella fatta al punto B *osservazione a sinistra.*

Scol. Se si fosse dimandata la livellazione dell'andamento compreso fra i dati due punti, avrebbesi pure collimato a quante altre mire sarebbe stato comodo od utile piazzare nei punti intermedii del proposto andamento, e notato sullo schizzo l'altezza dello scopo sopra il terreno determinato dalla stessa visuale in ciascuna delle dette mire.

Se diversi andamenti avessero dovuto livellarsi ad un tempo, compresi fra gli stessi termini si sarebbe dalla stessa stazione collimato a più mire in ciascun dei proposti, registrando separatamente le altezze appartenenti a ciascuno.

Ciò praticato, è chiaro che la differenza tra l'osservazione fatta in A e quella in B esprimerà la cercata differenza di livello tra detti punti de' quali sarà più elevato o più lontano dal centro della terra quello cui corrisponderà l'altezza minore osservata.

Ma talvolta fa bisogno conoscere la differenza di livello tra due punti tra loro invisibili, o molto tra loro differenti di livello, ed in tal caso è necessario esporre il seguente altro metodo che ben a ragione vien detto.

Livellazione composta.

151. Basta collegare tra loro i due punti dati per mezzo di una successione di livellazioni semplici e però già s'intende che giova sciegliere tali punti sul terreno che sieno nel minor numero possibile ne' quali si possa fare stazione senza curare che i medesimi si ritrovino nella direzione de' punti dati se in tal direzione vi sarebbero occorse maggior numero di livellazioni semplici.

Progredendo intanto dall'uno verso all'altro e fatta nella prima stazione la prima livellazione semplice, si passi alla seconda, avvertendo 1.° che l'istrumento debba piazzarsi quanto più è pos-

sibile nel mezzo delle due aste ed a distanza da ciascuna di queste non maggiore di 500, o 600 metri per evitare le correzioni a ciascuna osservazione, ed è per tal causa che soventi ad una livellazione semplice vien sostituita una altra composta, quand'anche la prima avesse potuto praticarsi, 2.° che la seconda livellazione debbe venir collegata alla prima, facendo che l'asta che stava da un lato della prima stazione, sia quella che nello stesso punto resti dal lato contrario della seconda stazione, non essendovi bisogno che solo di fare alzar la mira od abbassarla quanto basti perchè vi corrisponda nel suo mezzo il raggio visuale diretto dalla seconda medesima stazione, onde nello schizzo si segnino nella stessa perpendicolare le due altezze osservate dalle due adiacenti stazioni, delle quali quella osservata dalla prima si chiamerà *altezza verticale a destra* e l'altra *altezza verticale a sinistra*; lo stesso si faccia in ciascun altra stazione per modo che, pervenuto all'altro punto dato si osserverà nello schizzo che ciascun' asta avrà due numeri segnati uno a sinistra e l'altro a destra ad eccezione delle due ultime, mentre la prima donde si è partito ne avrà uno solo a sinistra e l'ultima un solo a destra.

Fatta finalmente la somma delle *altezze verticali a destra* e di quelle *verticali a sinistra*, la differenza di queste somme esprimerà la differenza di livello de' due punti dati, avvertendo che sarà il punto a sinistra più o meno alto di quello a destra secondochè la somma delle altezze a sinistra sarà minore o maggiore di quella delle altre a destra e viceversa.

152. Debbasi a cagion d'esempio *determinare la differenza di livello di due punti A, B (fig. 109) dati sul terreno, mediante una livellazione composta.*

Si stabilisca volersi fare, cominciando da A la prima stazione di palmi 1000. Piazzato l'istrumento in un punto C approssimativamente medio tra gli estremi A, D della detta distanza. Si traguardi la mira messa nel primo punto A e si osservi in essa l'altezza di palmi 2, 50 e, senza muovere l'istrumento dal punto C, si traguardi la mira piazzata nel secondo punto D, osservandovi l'altezza di palmi 13, 20. Scelta una seconda stazione p. e. di palmi 500, si stabilisca l'istrumento in altro punto E medio della stessa e si osservi l'altezza di palmi 5, 60 nella seconda mira rimasta a suo luogo, di poi si traguardi una terza mira in

F punto estremo di detta seconda stazione, e vi si osservi l'altezza di palmi 15. Finalmente supponiamo che, così continuando, tutta la livellazione proceda come segue fino al punto B.

Distanze orizzontali		Altezze a destra	Altezze a sinistra
	1000	2. 50	13. 20
	500	5. 60	15. 00
	400	18. 30	4. 00
Somme	1900	26. 40	32. 20

Sarà l' altezza del punto A sul punto B espresso dalla differenza di palmi 32, 20 su' palmi 26. 40, cioè da'palmi 5. 80.

Ciò è chiaro, mentre se le altezze a dritta, cominciando da A, siano a, b, c, d . . . e quelle a sinistra a', b', c', d' . . . sarà pel diverso valore delle stesse, la differenza di livello de' punti estremi della prima stazione . . . . $a'-a$
quella degli estremi della seconda . . . . $b'-b$
quella degli estremi della terza . . . . $c-c'$
ec.
onde la differenza di livello cercata tra due punti A, B dovrà essere $(a+b+c+\ldots)-(a'+b'+c'\ldots)$

De' profili

153. Per *profilo* s' intende in topografia *il contorno della comun sezione della superficie di un terreno con quella verticale condotta per una data direzione*. Se tal direzione è secondo la lunghezza del terreno, dicesi *profilo longitudinale*, se l'è per traverso dicesi *profilo trasversale*, che nelle fabbriche corrisponderebbero rispettivamente allo *spaccato*, *sezione*, o *sciografia longitudinale* e *trasversale*. Queste però vengon quasi sempre collegate tra loro.

Sia a farsi il profilo per una direzione di lungo intervallo tra due punti dati sul terreno visibili, od indivisibili tra loro.

Nel primo e nel secondo caso si segni l'allineamento tra detti punti (Par. 2.ª, Sez. 1.ª Art. 1.°), marcando con de' picchetti, i punti che si vogliono indicati nel disegno cioè quelli ove le infrattuosità, gli avvallamenti ed irregolarità del terreno

siano più sensibili, moltiplicando detti punti nella ragione dell' esattezza che si richiede pel disegno, e si operi come nel problema precedente. Ottenuto così uno schizzo od una minuta di livellazione, configurando al di sopra delle perpendicolari e ad occhio il cennato profilo; si prenda pel primo punto una altezza verticale e tale che l'orizzontale che passa pel suo estremo superiore sorpassi il più alto punto del profilo e tal verticale si chiamerà *verticale ridotta* a differenza della già segnata che dicesi *vera. La differenza tra queste due verticali si aggiunga alla verticale vera a dritta della stessa prima stazione e la somma ovvero la 2.ª verticale ridotta, che giungerà fino all' orizzontale anzidetta, si sostituirà in luogo della seconda verticale vera e così si proseguirà fino all' ultima stazione.*

Segnate così le diverse distanze orizzontali tra le varie stazioni e le altre di ciascuno de' punti rimarchevoli da una linea di livello e sullo schizzo medesimo, è chiaro che i punti estremi inferiori delle stesse indicheranno la disposizione de' punti medesimi nel piano verticale che passa pe' punti estremi, ovvero il cercato profilo.

Per maggiore intelligenza facciamo seguire un piano di riduzione al quale potrebbe darsi la seguente forma:

Verticali vere				Verticali ridotte
	40. 00.		. . . . 1.ª	40. 00
1.ª a sinistra	3. 25			
	36. 75	Diff.		
1.ª a destra	4. 60			
	41. 55	Somma.	. . . . 2.ª	41. 35
2.ª a sinistra	2. 10			
	39. 25	Diff.		
2.ª a destra	5. 30			
	44. 55	Somma	. . . . 3.ª	44. 55

Se la superficie verticale che si suppone passare pe' punti estremi non sia piana, in tal caso basta solo avvertire che il disegno risultante del richiesto profilo dovrà essere munito della pianta dell' allineamento curvo tracciato sul terreno pe' punti medesimi.

Avendo così sott' occhio l' andamento e la posizione de' differenti piani del terreno, in ogni caso di regolare vecchi alvei dei fiumi, o di derivarne dei nuovi, o per l' irrigazione delle campagne, o per la navigazione, o per lo stabilimento di aquedotti, si potranno concertare e segnare le cadenti dei nuovi fondi, calcolare la quantità dell' escavazioni, ripartirvi le chiuse, i sostegni, le bocche ec.

154. Per maggiore intelligenza di quanto abbiam detto supponghiamo che debba costruirsi una strada. Occorrono in questo caso le due specie di profili e la pianta del profilo longitudinale.

La figura 110 n.° 1, 2, 3 esprime chiaramente il processo delle operazioni. Di esse la 1.ª indica la pianta della linea del profilo longitudinale e la 2.ª e 3.ª dinotano rispettivamente il profilo longitudinale ed i profili trasversali, ciascun de' quali ha col primo un punto di comune come l'è miglior pratica. Già si rileva 1.° che tutto consiste nel determinare i punti A, B, C . . . di maggiori inflessioni della detta linea nel senso verticale ed in quello orizzontale, 2.° che le stazioni debbonsi scegliere fra due di essi consecutivi, 3.° che co' metodi anzidetti si esegue la livellazione di essi punti per ottenere il profilo longitudinale e dalle stazioni medesime S, S,′ S″ ec. si sono osservati intorno l' orrizzonte diversi punti delle linee trasversali per ottenerne i corrispondenti profili, 4.° che questi debbon prendersi sempre con lo stesso ordine, cioè adottando di farli sempre con *colpi di livello d' avanti* o sempre con *colpi di livello indietro*, 5.° che i medesimi debbono scegliersi sempre normali a' corrispondenti tratti della linea longitudinale, salvo i casi in cui il terreno nol permetta: 6.° che debbe notarsi la distanza delle proiezioni orizzontali *ab*, *bc*, e delle lunghezze dei tratti AB, BC ec. che, potendosi, è bene che sieno piuttosto uguali tra loro.

Non potendosi dalla stessa stazione, come si è indicato, ottenere alcuno dei profili trasversali, si potranno questi rilevare a parte con gli ordinarii metodi di livellazione; però conviene che i punti A, B, C . . . venghino determinati per renderli comuni alle due specie di profili, onde rapportarli allo stesso piano di paragone.

Della livellazione di una superficie qualunque.

PROBL. I.

155. *Esporre il metodo per stabilire l' andamento di un terreno con la livellazione a curve orizzontali.*

Con tal metodo di cui si ebbe notizia dall' ingegnere italiano Ducarla si viene ad ottenere un disegno del dato terreno indicato da diverse curve concentriche le quali ne'punti ove più si accostano indicano naturalmente che il terreno sia più scosceso e dove più si allontanano lo mostrano più dolcemente inclinato; mentre tali curve sono i profili prodotti dalle diverse sezioni che si suppongono fatte orizzontalmente al terreno ed equidistanti tra loro, per lo che si rende chiaramente calcolabile il maggiore o minor pendìo de' diversi punti del terreno montuoso.

E già ne pare potersi dedurre il processo delle operazioni per l' esecuzione di tal metodo, dappoichè la prima consiste nel segnare con picchetti ad uguali distanze verticali diversi punti della superficie del terreno o monte in quella linea di sezione che produrrebbe un piano verticale tra un punto del contorno e quello più culminante del terreno; segnandoli sempre nello schizzo, lo che si ottiene con la livellazione della quale facendo uso, è necessario segnare anche le distanze orizzontali tra' punti medesimi, avvertendo che a scanzare gli equivoci suol segnarsi nel primo, secondo, terzo ec. picchetto i rispettivi numeri 1, 2, 3 ec. e lo stesso si eseguirà nello schizzo anzidetto. La seconda operazione consiste nel determinarsi tanti profili trasversali orizzontali quanti sono i picchetti piantati antecedentemente. Il raggio visuale di livello guiderà l' andamento orizzontale, e le sue lunghezze intercettate tra i diversi punti corrispondenti a' vertici di quel poligono pel quale dovran farsi passar le curve si segneranno del pari che gli angoli che le lunghezze medesime comprendono, con un goniometro qualunque. Da ciò si rileva che gioverebbe con la plancetta far tale operazione, e maggiormente se la stessa fosse a stadia. Volendosi solamente come sopra lo schizzo, poteva usarsi il grafometro ed anche la bussola a rilievo, potrebbe essendo tali strumenti muniti di livello a bolla d' aria.

Di qualunque istrumento però si faccia uso è necessario avvertire che le visuali orizzontali che offrono debbono passare pe' piedi de' picchetti 1, 2, 3 ec. e che, conoscendosi l'eguale distanza delle sezioni orizzontali potranno sempre calcolarsi le differenze di livello de' varii punti delle curve ovvero del terreno.

PROBL. II.

156. *Eseguire la livellazione di una superficie irregolare; cioè ottenere un disegno della pianta di un terreno, nel quale sieno segnate numericamente le diverse altezze di livello di que' punti del medesimo de' quali farà bisogno per eseguire la traccia di una strada ec.*

Si comincerà da quel punto che piacerà scegliere sul terreno e per esso si avvanzi una livellazione per quella direzione che più si crederà necessaria, marcando sempre nello sbizzo, com'è di regola, le distanze orizzontali e le proiezioni orizzontali delle distanze oblique tra i successivi punti de' quali si vuol conoscere la livellazione, non che l'angolo col quale dette distanze o le visuali fanno tra loro. In somma il tutto consiste nel supporre coverto da una rete di livellazioni il terreno o parte del terreno dato, ovvero supporre la sua superficie venire circoscritta od iscritta, o parte iscritta e parte circoscritta da quella di un poliedro del quale le linee che sono i lati delle diverse sue facce formano la reticolazione anzidetta, od un intersecamento di livellazioni. Co'metodi di livellazione esposti si potranno, dopo essersi passato al disegno in proporzione, segnare a' punti che corrispondono a quelli scelti sul terreno i numeri delle diverse loro altezze dal piano di livello prescelto e quindi dedurne le diverse differenze di livello tra loro. Perchè però si proceda con ordine conviene, trattandosi di grandi estensioni di terreno da appianarsi o darglisi un qualunque pendio, di ripartirlo in grandi quadrati di lato ciascuno non maggiore di palmi 400 per le ragioni dianzi indicate, e questi dividerli in altri 25, 36... 100 ec. quadrati piccoli secondo il bisogno. Nel segnare sul terreno detti quadrati è necessario marcare i loro vertici con de' paliciuoli perchè dovendosi verificare qualche quota non s'incontri difficoltà ed anche perchè possa colui che porta la mira conoscere facilmente e con certezza ove situarla.

La maggior parte dei lavori da eseguirsi sul terreno esigono che si conosca la sua forma le sue inflessioni ec. e però l'è cosa di massima importanza l'eseguire con precisiune la livellazzione di un qualunque terreno. Il primo vantaggio che offre tal metodo si è di conoscere particolarmente la livellazione di quei soli punti che possono interessare il topografo senza determinarne altri, che forse riuscirebbero d'inutile scopo per le operazioni cui è diretto: può inoltre farsi uso benanche del più semplice strumento da livellazione, mentre risultano appieno determinati i vertici del poliedro nello spazio, conoscendo la distanza reale tra essi, l'angolo che ciascuna di loro forma con la linea meridiana, ovvero con altro lato contiguo di stabilita direzione, e l'angolo che ciascuna di tali rette fa con la verticale. Per tal metodo si vede pure quanto riuscirebbe utile la stadia facilitando le operazioni, e facendo tutto conoscere in una sola osservazioue per ciascuna stazione.

Tal metodo è pure a prescegliersi al precedente in quanto che il primo non sarebbe applicabile nel caso di terreni poco irregolari, ed anche perchè si possono a tavolino ricavare que'profili che si vorranno per direzioni qualunque, senza avere il bisogno di ritornare sopra luogo.

Ottenuta la livellazione di una superficie con gli esposti metodi, si rileva prontamente la parte di terreno che abbisogna di riempimento e quelle che debbono soggettarsi a tagliamento ec... il punto più alto ed il più depresso, i punti di eguale livello pe' quali cioè passerebbe un piano di *sezione orizzontale* ec.

Abbiamo ora parlato della livellazione di due punti ovvero di una linea, mentre conoscendo la differenza di livello di due punti della medesima e la distanza tra essi o la proiezione orizzontale di tal distanza, risulta sempre determinato l'angolo col quale la prima s'inclina alla seconda, o quest'ultima alla prima che dicesi *angolo di pendio*, il quale suol valutarsi dal rapporto della verticale abbassata da uno de' due punti sull'orizzontale che passa per l'altro punto; alla distanza effettiva de' punti medesimi; onde nella livellazione delle strade nel senso longitudinale dicesi che un tratto sale o scende al 2 al 3 al 4 ec. per 100 se le indicate linee si truvano fra loro nella ragione di 2 a 100 di 3 a 100 ec., abbiamo inoltre indicati i metodi per la livellazione di una superficie qualunque. Passiamo ora a parlare

Della livellazione di un piano val quanto dire della ricerca della sua inclinazione all' orizzonte.

157. Per la conoscenza della livellazione di un piano è sufficiente quella de' seguenti problemi.

PROBL. I.

158. *Determinare l' angolo E col quale un piano s'inclina all' orizzonte, date che sieno di due rette OB, OC (fig. 111) concorrenti in un punto esistenti nel dato piano, gli angoli V, V' che fanno rispettivamente con la verticale, e l' angolo V'' che fanno tra loro.*

Siano BO, OC tali rette di qualunque lunghezza, AO la verticale, sarà $AOB = V$, $AOC = V'$, $BOC = V''$. Si concepisca descritta una sfera di raggio uguale ad 1, col centro in O; prolungati i tre piani AOC, AOB, BOC e, menato per O il piano orizzontale DOE fino ad incontrare la detta sfera; chiaramente ne risulterà il triangolo sferico ABC, i cui lati noti sono $AB = V$, $AC = V'$, $BC = V''$, ed il triangolo BFD rettangolo in D, essendo verticale il piano AOD. Per determinare l' angolo in $F = E$ di questo secondo triangolo è necessario risolverlo e però deve determinarsi prima l' angolo in B dello stesso. A tale oggetto, posto $V + V' + V'' = 2P$, la trigonometria sferica somministra, risolvendo il triangolo ABC,

$$\text{sen.}\frac{1}{2}ABC = \sqrt{\frac{\text{sen.}(P-V)\,\text{sen.}(P-V'')}{\text{sen.}V\,\text{sen.}V''}}$$

$$\cos.\frac{1}{2}ABC = \sqrt{\frac{\text{sen.}P\,\text{sen.}(P-V')}{\text{sen.}V\,\text{sen.}V''}} \text{ da cui}$$

$$\text{sen.}\,ABC = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}ABC\,\cos.\frac{1}{2}ABC =$$

$$= \frac{2\sqrt{\text{sen.}P\,\text{sen.}(P-V)\,\text{sen.}(P-V')\,\text{sen.}(P-V'')}}{\text{sen.}V\,\text{sen.}V''} =$$

$$= \text{sen.}(180^\circ - ABC) = \text{sen.}(DBF) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Passando al triangolo BDF si ha

$$DB = AD - AB = 90^\circ - V,\ BDF = 90^\circ,$$

è noto per la (1) sen. DBF, e quindi risolvendolo si ottiene per la stessa Trigonometria l' equazione

$$\cos. \text{BFD} = \cos. \text{BD}\ \text{sen. DBF}$$

ovvero, sostituendo cos. BD=sen. V sarà per la (1)

$$\cos. \text{E} = \frac{2\sqrt{\text{sen.P sen.}(\text{P}-\text{V})\ \text{sen.}(\text{P}-\text{V}')\ \text{sen.}(\text{P}-\text{V}'')}}{\text{sen. V}''} \ldots (2)$$

equazione semplicissima che si cercava, e che si presta con facilità ad essere calcolata co' logaritmi.

PROBL. II.

159. *Poste le cose del problema precedente, trovare l'inclinazione con sole costruzioni geometriche, avendo l' ampiezza non la graduazione degli angoli.*

La soluzione è agevole, costruendo l'equazione (2) nel seguente modo. Siano V,V',V'' *(fig. 112 n. 1)* i tre angoli in ampiezza ad ABF un cerchio di raggio uguale ad 1. Sarà facile segnare tre archi Aa=V ba=V', bB=V'', onde BOA=V + V' + V''. Così pure, preso bc=V'', sarà cOA = V + V' — V'', preso Be = 2V' sarà cOA =V+V''—V' e finalmente fatto Bg=2V risulta gOA=V'+V''—V Centro in F e raggio =1=FO, descrivasi l'arco B'O, dopo aver congiunto F coi punti c, g, e, B, si avrà chiaramente

$$\text{O}c' = \frac{\text{A}c}{2} = \frac{c\text{OA}}{2} = \frac{\text{V}+\text{V}'-\text{V}''}{2} = \text{P}-\text{V}''$$

$$\text{O}g' = \frac{g\text{A}}{2} = \frac{g\text{OA}}{2} = \frac{\text{V}'+\text{V}''-\text{V}}{2} = \text{P}-\text{V}$$

$$\text{O}e' = \frac{e\text{A}}{2} = \frac{c\text{OA}}{2} = \frac{\text{V}+\text{V}''-\text{V}'}{2} = \text{P}-\text{V}'$$

$$\text{OB}' = \frac{\text{BA}}{2} = \frac{\text{BOA}}{2} = \frac{\text{V}+\text{V}'+\text{V}''}{2} = \text{P}$$

Abbassate le perpendicolari c'c'', g'g'', e'e'', B'B'' ed indicate con s''', s', s'', s per brevità si avrà

s=sen. P, s'=sen. (P—V), s''=sen. (P—V'), s'''=sen. (P—V'')

Ad arbitrio combinando i quattro seni si adattino come nella fig. 112 n.° 2, cioè prendasi Co''=2s'',Co=2s,Co'''=2s''',Co'=2s'. Si descrivano come si osserva i semicerchi o'Ho', oGo''' ed an-

cora l'altro $Hi G$ sopra HG perpendicolare ad oo'. Si trovi (*n.° 1*) la distanza bQ di b dal raggio BO, sarà $bQ=$sen. V'. Si tagli (*n.°* 2) $Cm=bQ$ si congiunga im, facciasi retto l'angolo min; condotta la normale $A'n$ (*n.° 1*) dopo aver preso $On=cn$ *n.° 1 e 2* congiunto $A'O$, si avrà l'angolo cercato

$$E=AOA'.$$

La ragione di tal processo è evidente. Infatti pei due semicerchi $o' Ho'$, oGo''' (*n.°* 2), si ha $GC = 2\sqrt{ss'}$, $CH = 2\sqrt{s's''}$. Pel semicerchio HiG si ha

$(c)^2=(HC \times GC)=2\sqrt{s\, s'\, s'\, s''}$, e pel triangolo rettangolo nim risulta

$$nc=\frac{(ic)^2}{(cm)}=2\sqrt{\frac{s\, s'\, s'\, s''}{\text{sen. } V''}}=\frac{2\sqrt{\text{sen.} P \text{sen.}(P-V)\text{sen.}(P-V')\text{sen.}(P-V'')}}{\text{sen. } V'}$$

$=$ cos. E valore trovato nella seconda. L'ultima parte della costruzione determina E per mezzo del suo arco.

Perchè intanto potrebbe avvenire che sopra luogo mancasse un istrumento goniometrico nè si volesse fare altra operazione per conoscere l'ampiezza di alcun angolo, allora potrebbe essere utile il seguente

PROBL. III.

160. *Risolvere il primo problema analiticamente, senza far uso di angoli.*

Sulle due rette nominate in principio si prendano e misurino parti eguali (*fig. 113*) $OB=OC=a$ come pure le orizzontali $BB'=c$, $CC'=c'$ fino alla verticale AO e la distanza $BC=c''$.

Per O si concepisca passare un piano orizzontale e su di esso proiettati B, C, BOC in $\beta O\gamma$. Si avrà chiaramente $O\beta=BB'=c$

$$O\gamma=c'c=c', \; B\beta=BO=\sqrt{a^2-c^2}, \; C\gamma=c'O=\sqrt{a^2-c'^2},$$

$$B\beta=\sqrt{(BC)^2-(\beta B-C\beta)^2}=\sqrt{c''^2-\left(\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-c'^2}\right)^2}=$$

$=\sqrt{c''^2+c'^2+c^2-2a^2+2\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-c'^2)}}$. D'altronde è noto per la geometria analitica, che se a,b,c sono tre lati di un triangolo, la sua area è $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

dunque sarà

$$BOC = \frac{c''}{4}\sqrt{4a^2 - c''^2},\ (O\beta\gamma) = \frac{1}{4}\sqrt{\Big((c+c'+\beta\gamma)(c+c'-\beta\gamma)}$$

$$\overline{(c+\beta\gamma-c')(c'+\beta\gamma-c)\Big)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\Big((c+c')^2-(\beta\gamma)^2\Big)\Big((\beta\gamma)^2-(c-c')^2\Big)} =$$

$$\sqrt{a^2(c^2+c'^2+{}^2c''^2) - \frac{(2a^4+c'^4)}{4} + (2a^2-c'^2)\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-c'^2)}} \ldots (4)$$

Ora la proiezione eguaglia l' area moltiplicata per coseno dell' angolo dei due piani, dunque $O\beta\gamma = (OBC)$ cos. E, e quindi

$$\text{cos. E} = 4\sqrt{\Big(a^2(c^2+c'^2+c''^2) - \frac{(2a^4+c''^4)}{4} + (2a^2-c''^2) \times}$$

$$\overline{\times\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-c'^2)}\Big)} : c''\sqrt{4a^2-c''^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

che è l' equazione cercata che prestasi al calcolo numerico.

Che se volesse risparmiarsi benanche questo semplice calcolo potrebbe adoprarsi altro metodo grafico che ne offre il seguente altro

PROBL. IV.

161. *Risolvere il precedente con sole geometriche costruzioni.*

Misurate le quattro rette come si è detto, si abbiano (*fig. 114 n. 1*)

$$A'B' = c,\ A'C' = c',\ A'D' = c''\ A'E' = a$$

Prendasi $AC = 2a$ e vi si descriva un semicerchio. Indi $BD = c$ $BF = c'$ e le perpendicolari DG, EH, FH sarà

$$GF = \sqrt{a^2-c^2} - \sqrt{a^2-c'^2}.$$

Si tagli $Ag = c''$ e su di essa si descriva il semicerchio, centro A ed intervallo $AK = GF$ si descriva un arco, si avrà il punto K, e $Kg = \sqrt{c''^2 - (\sqrt{a^2-c^2} - \sqrt{a^2-c'^2})}$ lato del triangolo proiettato. Dopo ciò (*fig. 114 n.° 2*) con $LM = c''$, $NL = NM = a$ si descriva il triangolo NLM che è quello proiettato (cioè BOC nella fig. 113) e con $MR = Kg$, $MS = c'$, $SR = c$ descrivasi l'altro triangolo MSR (che è la proiezione $O\beta\gamma$ della fig. 113).

In essi si abbassino le perpendicolari NP, SQ e sui prolungamenti presi $P\theta = PL$, $QU = TM = \frac{MR}{2}$

descrivansi i semicerchi $N\omega\theta$, SxU.

Sarà $(\omega P)^2 = 2(NLM)$, $(Qx)^2 = 2(MSR)$, onde

$$\cos. E = \frac{a(MSR)}{(NLM)} = \frac{a(Qx)^2}{(\omega P)^2}$$ preso nel cerchio di raggio a.

Or prendasi $\frac{Qv}{2} = \omega P$, si congiunga vx e facciasi retto l'angolo vxy, sarà $yQ = \frac{(Qx)^2}{\omega P}$, quindi

$$\cos. E = \frac{a(rQ)}{\omega P}.$$ Si tagli $(Pz) = a$, $(Pr = (rQ)$ congiungasi ωr, si meni la parallela zO, sarà $OP = \cos. E$, laonde preso (n. 1) $B\varphi = OP$, innalzata la perpendicolare $(\varphi\psi)$, sarà l'angolo cercato

$$E = AB\psi$$

Finalmente potrebbe per diversi altri casi giovare la soluzione di quest' altro

PROBL. V.

162. *Risolvere il medesimo, supposto misurato in gradi uno dei tre angoli e tre rette, o due angoli e due rette.*

1.° Siasi misurato V, c', c'', a, chiaramente si ha $c = a$ sen. V, onde la (5.ª) diviene

$$\cos. E = 4\sqrt{\left((a^2)c'^2 + c''^2 - a^2(1 + \cos.^2 V)\right) - \frac{c''^4}{4} +}$$

$$+ a \cos. V \sqrt{a^2 - c'^2}\,(2a^2 - c''^2)\Big) . c' \sqrt{4a^2 - c'^2} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

che si presta a calcolarsi.

2.° Un equazione analoga avrebbe luogo dato V', c, c'', e basterebbe mutare V in V', c in c', c' in c''.

3.° Sieno dati V'', c, c', a, sarà $\frac{c''}{2} = a$ sen. $\frac{V''}{2}$, quindi la (5ª) diviene

$$\cos. E = \sqrt{\left(a^2(c^2 + c'^2) + a^4(3 \text{sen.}^2 \frac{V''}{2} - 2) - 2a^2 \cos. V'' \times\right.}$$

$$\left. \times \sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - c'^2)}\right) : a^2 \text{ sen. } V'' \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

4.° Sieno dati V', V, c'', a, si ha $c = a$ sen. V, $c' = a$ sen. V', onde la (5) da

$$\cos.E = \frac{4\sqrt{\left(a^2c'^2 - \frac{c''^4}{4} - a^4(\cos.^2V + \cos.^2V') + a(2a^2 - c''^2)\cos.V\cos.V'\right)}}{c''\sqrt{4a^2 - c'^2}.} \quad \ldots (8)$$

5.° Sieno dati V, V'', c', a, dalla 5.ª si ottiene $c = a$ sen. V, e quindi si ha la seguente $\left(\text{avendosi } c = a \text{ sen.} V,\ \frac{c''}{2} = a \text{sen.} \frac{V''}{2}\right)$

$$\cos.E = \sqrt{\left(a^4\left(1 + \text{sen.}^2V - 3\cos.^2\frac{V''}{2}\right) + a^2c'^2 + 2a^3\cos.V\cos.V'' \times \right.}$$
$$\left. \times \sqrt{a^2 - c'^2}\right) : a^2 \text{ sen. } V'' . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Molti, poco esperti nel maneggio delle tavole logaritmiche, o che non abbiano pronte le medesime per calcolare le diverse esposte formole trigonometriche, potranno giovarsi di quanto segue:

163. *Calcolo numerico delle formole trigonometriche con le operazioni di aritmetica elementare.*

Per calcolare le diverse espressioni trigonometriche, occorrerà di estrarre talvolta radici quadrate, e sempre poi trovare archi per mezzo di seni, coseni, tangenti ec. o viceversa alcuna di tali linee per mezzo degli archi. Non fa d' uopo qui far menzione dell' estrazione di radice quadrata da numeri, poichè essa è nota per quanto s' insegna in aritmetica, resta dunque a stabilir metodi e formole che diano facilmente archi per mezzo di linee, o viceversa, e questo è contenuto nei seguenti problemi.

PROBL. I.

164. *Dato un arco A in gradi, esprimere la sua lunghezza in parti del raggio = 1.*

Si sa essere circonferenza di raggio $1 = 3,1415926 = 180°$, or se L indica l' arco in lunghezza, si avrà

$A : L :: 180.° : 3,1415926$, d' onde
$L = 0,174533\ A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$

Esempio — Sia $A = 33.° 5'$, si avrà $A = 33°, + \frac{5.°}{60} = \frac{203.°}{60}$,

$$L = 0,174533 \frac{203}{60} = 0,5905066$$

PROBL. II.

165. *Dato l'arco L in parti del raggio, esprimerlo in gradi, e minuti.*

Dalla (1) ricavasi

$$A = 57,295780\ L^{\circ} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Esempio — Sia $L = 1,25$ si avrà $A = 57,295780 \times 1,25^{\circ}$
$= 71,62^{\circ} = 71^{\circ}\ 37',2.$

PROBL. III.

166. *Dato il seno, trovare l'arco in parti del raggio, o in gradi.*

Lo sviluppo in serie da una formola (*) si emergente che senza errore sensibile può ridursi ai soli quattro primi termini, ed operando facili trasformazioni si ha (essendo A arco in gradi, L sua lunghezza).

$$\text{sen. } A \left\{ 1 + \frac{\text{sen.}^2 A}{6} + \frac{3}{40}\text{sen.}^4 A + \frac{5}{112}\text{sen.}^2 A \right\} =$$

$$= L = \text{sen. } A + \frac{\text{sen.}^3 A}{6} \left\{ (1 + 0,225\ \text{sen.}^2 A)^2 - \right.$$

$$\left. - 0,004348\ \text{sen.}^4 A \right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

che dà la lunghezza dell' arco. La (2) poi darebbe lo stesso in gradi, cioè

$$A = 57,29578\ \text{sen. } A + 9,549198\ \text{sen.}^3 A \Big((1 + 0,225\text{sen.}^2 A)^2 -$$

$$- 0,004348\ \text{sen.}^4 A \Big) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Scol. Se sen. A è molto piccolo, ovvero non è necessaria grande approssimazione, le precedenti si riducono alle due

$$\left. \begin{array}{l} L = \text{sen. } A \Big((1 + 0,075\ \text{sen.}^2 A)^2 + 0,03403\ \text{sen.}^2 A \Big) \\ A = 57,29578\text{sen.} A \Big((1 + 0,075\text{sen.} A)^2 + 0,03403\text{sen.}^2 A \Big) \end{array} \right\} \ldots (5)$$

(*) $L = \frac{\text{sen.} A}{1} + \frac{1\ \ \text{sen.}^3 A}{2.\ 3} + \frac{1.\ 3\ \text{sen.}^5 A}{2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{1.\ 3.\ 5\ \ \text{sen.}^7 A}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \ldots$

167. *Dato l'arco in parti del raggio, ritrovare il seno.*

Si ritengano i soli primi quattro termini nello sviluppo in serie (**) perchè molto convergente si avrà facilmente.

$$\text{sen. } A = L - \frac{L^3}{6}\left(\left(1 - 0,025L^2\right)^2 + 0,00581L^4\right) \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

allorchè $L < 0,785398$, ovvero $A < 45°$.

Quando poi $L > 0,785398$, si faccia

$$L' = 90° - A = 1,5707963 - L$$

si avrà $\cos. L' = \text{sen. } A$, e nello sviluppo di $\cos. L'$ (***) arrestandosi ai quattro termini, si ha

$$\text{sen. } A = 1 - \frac{L'^2}{2}\left\{\left(1 - 0,041666L'^2\right)^2 + 0,001041L'\right\} \; . \; . \; (7)$$

Scol. 1.° Se L, o L riescono piccole frazioni le (6) o (7) si riducono all'altre seguenti:

$$\text{sen. } A = L\left\{\left(1 - 0,08333L\right)^2 + 0,0014L^2\right\}$$

$$\text{sen. } A = 1 - \frac{L'^2}{2}\left\{1 - 0,08333L'^2\right\}$$

(**) $\text{Sen. } A = L - \frac{L^3}{1.2.3} + \frac{L^5}{1.2.3.4.5} - \frac{L^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$

(***) $\text{Cos. } L' = 1 - \frac{L'^2}{2} + \frac{L'^4}{2.3.4} - \frac{L'^6}{2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$

Per dimostrarle facciasi $y = \cos. a$, $x = \text{sen. } a$, $y' = \cos. mx$, $x' = \text{sen. } mx$, per essere $\text{sen.}^2 a + \cos.^2 a = 1$ si ha $(y^2 + x^2)n = 1 = (y + x\sqrt{-1})(y - x\sqrt{-1})$; $y'^2 + x'^2 = 1 = (y' + x'\sqrt{-1})(y' - x'\sqrt{-1})$, onde $(y' \pm x'\sqrt{-1}) = (y \pm x\sqrt{-1})^m$. Facendo valere successivamente il doppio segno ed addizionando, e sviluppando col binomio di Newton si ha

$$y' = \frac{1}{2}(y + x\sqrt{-1})^m + \frac{1}{2}(y - x\sqrt{-1})^m =$$

$$= y^m - \frac{m(m+1)}{1.2} y^{m-2} x^2 = y^m - \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1.2}(mx)^2 y^{m-2} +$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1.2.3.4}\left(1 - \frac{3}{m}\right)\left(mx\right)^4 y^{m-4} - \ldots\ldots\ldots$$

SEZIONE II.

Della misura delle altezze.

168. Nel §. 78 si è già detto alcun che intorno tali misure; ma non ancora avendo fatto parola della livellazione e quindi della sfericità della terra, non si potettero ivi esporre alcuni metodi come quelli due de'quali ora parleremo l' uno detto *Metodo trigonometrico*, l'altro *Barometrico* i quali, trattandosi di grandi altezze come di montagne e dal livello del mare o da un piano di *livello vero* che passa per l'occhio dell'osservatore, sono assolutamente necessarii, mentre con l'esposto al paragrafo citato non si potevano che determinare le altezze medesime del piano di livello apparente proposto e solo con approssimazione per grandi distanze, dessi però sono a prescegliersi laddove per gli usi topografici si trattasse di operare a mediocri distanze dalle altezze delle quali se ne dimanda la determinazione, mentre può per tali casi considerarsi essere quasi confuso il piano tangente la superficie della terra con la superficie anzidetta.

Del Metodo Trigonometrico

169. *Determinare l' altezza di un monte dal piano di livello vero che passa per l' occhio dell' osservatore.*

Sia AE (*fig.* 115) l'orizzontale o piano di livello apparente che passi pel punto di stazione A, AL un arco di cerchio massimo della terra di cui C sia il centro, B sia il vertice di un monte di cui debbasi determinare l' altezza dal piano di livello vero che passi per A. Suppongasi determinata una proporzionata base AF sul terreno, che sarà meglio prenderla nella direzione di AE orizzontale che passa per la verticale BL abbassata dal vertice B, e suppongasi risoluto il triangolo ABF (§. 18) siasi così determinata la distanza $AB = a$. Suppongasi inoltre risoluto l' altro triangolo AEB (§. 9 cas. 2.°), che per gli usi topografici può supporsi rettangolo in E, onde siasi fatta nota la AE, avendo prima misurato l' angolo $A = \theta$ di elevazione, e quindi si avrà benanche la

BE altezza del monte sul livello apparente AE, che per una mediocre distanza si può ritenere come il corrispondente livello vero. Ma, volendo per una gran distanza tener conto della sfericità della terra e della refrazione, l'altezza a determinarsi sarebbe BL, non più BE, e però basterebbe determinare completamente la LE (pag. 4) ed aggiungerla a BE già determinata; il P. Riccioli ed altri Geodeti propongono diversi modi per determinare la BL; ma il professore G. Toaldo con più eleganza e verità ne rinviene il valore. Non basta conoscere l'angolo di altezza visibile BAE, bisogna conoscere l'angolo BAL, o pure EAL il che non è difficile, poichè cognita nel modo detto la AB o pure AE, questa non differendo sensibilmente dall'arco AnL, così prendendo un miglio geografico ovvero 951 pertiche di Parigi per un minuto, sarà noto l'angolo ACL.

Or per la 32. III. Eucl. l'angolo EAL fatto dalla tangente e dalla corda è uguale all'angolo nel segmento alterno il quale per essere alla circonferenza è uguale alla metà di quello al centro ACL noto. Dunque all'angolo osservato d'elevazione BAE si aggiunga la metà dell'angolo ACL, sarà noto BAL.

L'angolo BLA, posto l'orizzontale L*m*, sarà maggiore del retto BL*m* per l'angolo AL*m* eguale per la stessa ragione alla metà dell'angolo al centro ACL. Dunque nel triangolo BAL saranno noti i tre angoli col lato AB, e però si troverà AL valor della corda e finalmente BL altezza cercata del monte.

È chiaro che se si conoscerà l'elevazione del punto A dal livello del mare, anche per rapporto a tale livello si conoscerebbe subito l'altezza del punto B.

Metodo Barometrico.

170. Senza rimontare all'epoca di Ctebisio in cui era già noto il fenomeno del sollevamento dell'acqua nelle trombe aspiranti, o riferire quel poco che su tal riguardo ne ha detto l'immortale Galileo, od il perfezionamento che il celebre Torricelli portò alle trombe Ctebisiane, indicando che detto sollevamento dovevasi al peso ed alla pressione atmosferica, semplicizzandone pure l'esperienza con la sostituzione alle stesse di un cannello di vetro, e del mercurio all'acqua. Senza riportare inoltre i ri

sultati dell' esperienze sulle gravità specifiche del mercurio e dell' acqua del Muschembroek, del Cotes e d' altri, nè le regole empiriche del signor de Luc, nè i molti errori considerando e le grandi dispute cui han dato luogo le svariate particolarità di questo fenomeno, per cui sursero diverse ipotesi e da alcuni dubitossi perfino se ne potesse render ragione. Finalmente senza discendere all' esposizione dell' esatte teoriche della fisica moderna, che meglio potrebbero far parte di un trattato idrostatico, credo far bene scendere sull' arena del positivo e determinare una formola facile, rigorosamente dimostrata con la pura algebra elementare.

171. *Formola algebrica della livellazione barometrica e sua dimostrazione.*

L' esperienza ha mostrato che, crescendo le altezze barometriche in ragione geometrica, le altezze atmosferiche sono in ragione aritmetica. Indicando quindi con β le prime, con z le seconde, questa semplice legge si può esprimere in generale da

$$\beta = Ca^z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

essendo C,a costanti ignote.

Si stabilisca per livello di partenza, d' onde si computano le z da sotto in sopra, il livello del mare AB (*fig.116*). Siano C,D due stazioni in cui le altezze barometriche siano rispettivamente β,B e le altezze atmosferiche EF $= z$, DF $=$ Z. La (1) darà

$$B = Ca^Z, \ \beta = Ca^z \text{ d' onde } \frac{B}{\beta} = a^{Z-z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

in cui $Z - z =$ FE distanza verticale delle due stazioni. Volendosi tener conto della diversa temperatura dell' aria in C,D, siano t,T i gradi diversi esplorati col termometro; si ridurrà ad uniforme temperatura la colonna atmosferica DE supponendola di gradi $\frac{T+t}{2}$ medio aritmetico delle due temperature. D' altra parte l' esperienza dimostra che l' aria costantemente si dilata di $\frac{1}{268}$ del suo volume per ogni grado di temperatura, dunque anche la vera altezza FE sarà aumentata in detta ragione.

*

Pertanto dicasi ξ la vera altezza FE, sarà

$$\xi = Z - z + \frac{(Z-z)(T+t)}{2.268} = \frac{(Z-z)(T+t)}{536} + Z - z =$$

$$= (Z-z)\left(1+\frac{T+t}{536}\right),$$

da cui $Z-z = \dfrac{\xi}{1+\dfrac{T+t}{536}}$ . . . . (3)

per cui la (2) diviene $\dfrac{B}{\beta} = a^{\dfrac{\xi}{1+\dfrac{T+t}{536}}}$ . . . . (4)

Fa d' uopo ancora tener conto della diversa temperatura del mercurio nel barometro che è diversa da quella dell' aria ambiente. Questa, esplorata con altro termometro il cui bulbo peschi nella vaschetta del barometro, dia i gradi t', T' per le stazioni C, D. L' esperienza mostra che il mercurio si dilata per ogni grado di $\frac{1}{5412}$ del suo volume, ed anche l'altezza della colonna seguirà tal legge. Inoltre si toglie la differenza d'altezza barometrica dovuta alla diversa temperatura, riducendola ad essere eguale in ambedue i siti senza punto alterarsi lo stato della quistione, converrà quindi aggiungere alla temperatura in C la differenza $T'-t'$, ed allora l' altezza barometrica in C diviene

$$\beta\left(1+\frac{T'-t'}{5412}\right)$$

e la (4) diviene

$$\frac{B}{\beta\left(1+\dfrac{T'+t'}{5412}\right)} = a^{\dfrac{\xi}{1+\dfrac{T+t}{536}}} \quad . . . . (5)$$

in cui resta ad isolare ξ valore cercato, e a trovare la costante

a. A tal uopo si metta il primo membro noto uguale ad a^{μ}; ciò che sempre può ammettersi, dovendo essere

$$\frac{\xi}{1+\frac{T+t}{536}}=\mu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

per togliere la forma trascendente dalla (5) sarà necessario premettere il seguente

L E M M A

Abbiasi $1+y=a^{N}$, e vogliasi N espresso per y, si faccia

$$N=Ay+A'y^{2}+A''y^{3}+A'''y^{4}+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

si avrà $(1+y)^{n}=1+y'=(a^{N})^{n}=a^{Nn}$ . . . . . . (b)
quindi per la (a) $nN=Ay'+A'y'^{2}+A''y'^{3}+$ . . . . $=$

$$=A\{(1+y)^{n}-1\}+A'\{(1+y)^{n}-1\}^{2}+$$

$$+A''\{(1+y)^{n}-1\}^{3}+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

essendo $y'=(1+y)^{n}-1$; ed $nN=nAy+nA'y^{2}+nA''y^{3}+ \dots$ per la (a), sarà l'equazione di condizione che fa scovrire A, A', A'' A''' . . . . ec. espressa da

$$A\{(1+y)^{n}-1\}+A'\{(1+y)^{n}-1\}^{2}+A''\{(1+y)^{n}-1\}^{3}+\dots=$$

$$=nAy+nA'y^{2}+nA''y^{3}+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

ora sviluppando le parentesi ed avendo

$$(1+y)^{n}-1=ny+\frac{n(n-1)}{1.\,2}y^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}y^{3}+\dots$$

si avrà, arrestandosi alla terza potenza d'y,

$$nAy\left\{1+\frac{(n-1)}{1.\,2}y+\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}y^{2}+\dots\dots\right\}+$$

$$+n^{2}A'y^{2}\left\{1+\left(\frac{n-1}{1.\,2}\right)^{2}y^{2}+\frac{2(n-1)}{1.\,2}y+\right.$$

$$\left.\frac{2(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}y^{2}+\dots\right\}+$$

$$+ n^3 y^3 A'' \left\{ 1 + \left(\frac{(n-1)}{1.\,2} y + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} y^2 + \ldots\ldots \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(n-1)^2}{1.\,2} y^2 + \ldots\ldots \right) + \ldots\ldots \right\}$$

$$= nAy + nA'y^2 + nA''y^3 + \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Eguagliando tra loro i coefficienti delle stesse potenze d' y si hanno $n\,A = nA$

$$n\,A \left\{ \frac{(n-1)}{1.\,2} \right\} + n^2 A' = nA'$$

$$n\,A \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} \right\} + n^2 A' \left\{ \frac{2(n-1)}{1.\,2} \right\} + n^3 A'' = nA''$$

ec. . . . .

dalle quali ricavasi

$$(1-n^2)A' = \frac{A(n-1)}{1.\,2},\ A' = -\frac{A}{2},$$

$$(1-n^2)A'' = A\frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3} - \frac{nA(n-1)}{1.\,2} = A\frac{(n-1)}{1.\,2}\left(\frac{n-2}{3} - n\right) =$$

$$= \frac{A(n-1)(-2n-2)}{1.\,2.\,3} = -\frac{A}{3}(n-1)(n+1),\ (1+n)(1-n)A'' =$$

$$= \frac{A}{3}(1-n)(1+n),\ A'' = \frac{A}{3}$$

Sicchè sono noti i coefficienti cercati, avendosi $\frac{A}{1}$, $A' = -\frac{A}{2}$, $A'' = \frac{A}{3}$, e per induzione

$A''' = -\frac{A}{4}$, $A^{IV} = \frac{A}{5}$, $A^{V} = -\frac{A}{6}$ ec. . . . . onde la (a) da

$$N = A\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \text{ec.} \ldots\right) \ldots\ldots \quad (f)$$

$$A\left\{ y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots\ldots\ldots \right\}$$

ed $1 + y = a$ . . . . (4)

Questa vale anche mutando y in $-y$, onde

$$-A\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \ldots\ldots \right)$$

$1 - y = a$

d'onde per avere una serie più convergente

$$A(y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \frac{y^8}{4} \ldots\ldots\ldots)$$

$$\frac{1}{(1-y^2)} = a$$

ovvero fatto per brevità

$$Aw\left(1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} + \frac{w^3}{4} \ldots\ldots\ldots\right)$$

$y^2 = w$, si avià $\frac{1}{1-w} = a$ . . . . (h)

Ritornando alla nostra ricerca, mettasi

$\frac{1}{1-w} = a^{\mu}$, si avrà $w = 1 - \frac{1}{a^{\mu}}$, il quale per la (5) e (6)

darà $w = 1 - \frac{\beta}{B}\left(1 + \frac{T'-t'}{5412}\right)$ . . . . (7)

Inoltre $a^{\mu} = \frac{1}{1-w} = a^{Aw\left(1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} + \frac{w^3}{4} + \ldots\right)}$

adunque $\mu = \frac{\xi}{1 + \frac{t+t}{536}} = Aw\left(1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} + \frac{w^3}{4} + \ldots\right)$

dalla quale si ricaverà ξ in serie convergentissima, essendo sempre w piccola frazione.

Per determinare la costante A basta fare diverse osservazioni ad altezze note, e prendere per A il medio valore tra quelli ricavati dalla precedente relazione. Così praticando si è trovato

$$A = 18336$$

e quindi $\xi = \overset{metri}{18336}\, w\left(1 + \frac{T+t}{536}\right)\left\{1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} + \frac{w^3}{4} + \ldots\right\}$ (8)

Esempio. In una livellazione siasi ottenuto

$T = 15°.00$
$t = 14°, 24$
$T' = 11°, 20$
$t' = 9°, 10$
$B = 0, 70^m$
$\beta = 0, 65^m$

colla (7) si ricava $w = 0,0 \ldots 97$, e colla (8)

$\xi = \ldots 786, 40$ metri.

Corol. Si è ommesso il quinto termine della serie, poichè $\frac{w^4}{s}$ < 0,000 005, e ciò tanto più sicuramente può farsi quanto minore deve risultare ξ, sicchè in generale può ritenersi sufficiente la (8) senza altri termini per la pratica.

SEZIONE III.

Degli scandagli.

172. Per *iscandaglio o sondazione* s'intende la livellazione di una superficie sottostante ad un qualunque volume di acqua. La superficie di livello vero cui debbono però riferirsi i diversi punti di quella a scandagliarsi è quella delle acque medesime per modo che la differenza di livello di due punti del terreno subaqueo vien data dalla differenza di due sondazioni, cioè da quella delle altezze delle acque, nelle verticali de' punti medesimi, le quali si ottengono con un piombo del peso di 20 a 30 rotola di figura piramidale, legato all' estremo di una corda metrica che si manda al fondo ne' detti punti stando in una barca o piccola scafa in loro corrispondenza.

Le linee di sonda debbono essere determinate di posizione fra loro, segnando sulla carta gli angoli delle loro inclinazioni con la bussola. Di una di esse almeno però debbe determinarsi la posizione rispetto alla riva, al lido, a qualche scoglio ec.; e ciò può farsi in diversi modi, p. e. stando sulla riva e scegliendo in essa due punti fissi o naturali si determini la loro distanza e quindi gli estremi della retta o linea principale degli scandagli già marcata sulla superficie delle acque con de' galleggianti, ovvero, senza operare sul terreno si potrebbe determinare uno degli estremi della principale linea prescelta sulla superficie delle acque, osservando gli angoli formati tra loro da tre visuali almeno, dirette ad altrettanti punti naturali o fissi sul circostante suolo e segnarvi inoltre l' orientazione della linea medesima di cui, com' è chiaro, sarà pienamente determinato il cominciamento e la direzione.

Con una barchetta o scafa si percorreranno tali linee, regolandone con la bussola la direzione secondo il bisogno e lo scopo dell' operatore; ma tali imbarcazioni essendo troppo mo

bili l'è meglio per le operazioni idrografiche, dirigerle marcando sul terreno due oggetti più che è possibile lontani tra loro ed, affidandosi alla loro direzione, regolare le linee di sonda. Si segneranno le distanze de' diversi punti di ciascuna di esse linee che si sceglieranno per istazionarvi e scandagliare i corrispondenti nel fondo e si noteranno del pari le diverse lunghezze rispettive della corda dello scandaglio. Gl' intervalli saranno più vicini se il fondo sarà molto ineguale e viceversa; e dovendosi sondare a grandi profondità ove il fondo, sempre di simile natura, offra un regolare pendio, si può lasciare uno spazio molto maggiore fra due stazioni consecutive.

Poichè inoltre il disegno riesca piuttosto gradevole alla vista, anzichè confuso per le molte cifre affollate senza alcun' ordine, è da procurarsi che desse linee sieno quanto più si può equidistanti e parallele, segnando sempre la loro posizione come si è detto, ed in tal disposizione basta per ciò fare di segnare la sola distanza tra loro.

Onde conoscere particolarmente la configurazione del fondo di un fiume, giova che le dette linee di scandaglio sieno nella sua direzione longitudinale pel mezzo di esso, ed in quelle trasversali piuttosto equidistanti e normali a quella intermedia: è però d' avvertirsi che la velocità delle acque, procurando un deviamento alla corda dello scandaglio, si hanno le indicazioni maggiori del vero; si calcola però la verticale B*b* (*fig. 117*) con la proporzione AB: AC:: A*b*: A*c*

d'onde si ha $Bb = \frac{AC.Ac}{AC} - AB$.

Per iscandagliare i banchi d' arena od ai massi di rocce, sarebbe difficile esporre i differenti metodi, però l'uso e l' esperienza n' insegneranno molto più che tutti i dettagli che a tal soggetto potremo farci ad esporre. Diremo soltanto che l' è d' uopo sezionarle in diversi sensi con linee vicinissime di sonda, e non trascurare di fissare i loro limiti con osservazioni di angoli.

Abbiamo fin qui inteso parlare di acque tranquille; ma la superficie di quelle del mare ed anche de' laghi e dei fiumi non è sempre di costante livello per le svariate cagioni naturali, per le quali dovrebbesi tener conto delle alte e basse maree per l' influenza del sole, dei venti ed altro, affine di calcolare il livello medio a ritenersi; ma per le operazioni puramente topo-

grafiche non occorrono tali osservazioni; bastando per le medesime scegliere un tempo in cui la superficie delle acque sia tranquilla e non agitata da venti, e riferire tal superficie a punti naturali o fissi, sempre visibili sia sul terreno, sia in mezzo alle acque, affinchè variando per le dette cagioni il livello, si potrebbero sempre ritrovare le rispettive misure, aumentando o diminuendo di una quantità costante quelle prima ottenute.

Se le acque sieno guadabili, si facilitano le operazioni medesime, potendovi entrare un uomo con una mira graduata, onde non ci faremo ad indicarle dipendendo da poca riflessione del sagace operatore.

Noi adunque non parleremo di operazioni idrografiche, potendosi per le stesse consultare il Sig. Bégat 1839, Sig. Beautemps-Beaupré 1829, Sig. Le Saulnier de Vauhello su i travagli idrografici ed astronomici eseguiti con i signori Vissocq, Cazeaux e Darondeau, i signori Monnier e Duperré 1828, i signori Bérard e Tessan 1837 ed altri, mentre per la formazione delle carte idrografiche interessanti per la direzione dei passi, e per indicare le diverse particolarità, rapportare sulla stessa carta la configurazione ed i dettagli topografici delle costiere, i massi di rocce, i banchi d' arena, l' elevazioni delle principali sommità al di sopra delle basse maree dell' equinozio, la quantità d' acqua che resta sulle stesse, fra quelle che non discuoprono i loro limiti e la qualità del fondo delle altre parti del mare, per le medesime diceva ciò non basterebbe a soddisfare a tutt' i bisogni di naviganti ed alla completa istruzione de' piloti: esse debbono venire inoltre accompagnate da una ragionata collezione di disegni gli uni indicanti la direzione e velocità de' canali, gli altri i diversi aspetti che presenta la costiera, ed i principali siti di pericolo. A tutto ciò è d' aggiungersi una precisa indicazione de' venti dominanti e loro effetti, della velocità delle correnti tanto generali che particolari con le variazioni che ricevono a diversi istanti della marea, lo stabilimento di diversi porti, e finalmente si procureranno diverse notizie non solo per le proprie osservazioni, ma pure interrogando i piloti di ciascuna località. Ma ripetiamo tutto ciò, non dovendo interessare il topografo, non può venire sviluppato nel presente trattato e però mettiamo termine al

CONCHIUSIONE

113. Da ultimo, giova ripetere, a facilitare l'esattezza della pubblica critica, essere stato mio scopo quello di scrivere un completo trattato di pura Topografia considerata nella sola parte scientifica, onde si vede non confuso con la parte disegnativa, nè con le cognizioni puramente geodetiche. Ho inoltre evitato il superfluo, nè ho fatto parola di quelle cose che non potevano a buon dritto far parte di simile trattato come delle ricognizioni militari ed altro, mentre ciò non formerebbe che l'insieme delle esposte teoriche e delle estese cognizioni di strategla e della guerra, le quali malamente ed incomplete avrebbero potuto venire esposte nel trattato medesimo.

In somma ho tentato di procurare un maggior progresso di questa scienza cotanto interessante, stabilire alcune nuove teoriche, ed esporre il tutto con brevità, chiarezza, rigorosità di metodo e di disposizione d'idee, per dare al pubblico un libro proprio alla istituzione.

Laonde spero che tal mio lavoro sarà bene accetto dal pubblico per la utilità che, se non m'inganno, contiene, od almeno per la buona volontà di giovar coloro cui mi son proposto indrizzarlo.

In ogni modo però conchiudo col ripetere al lettore le immemorabili parole di Seneca Ep. 64 Lib. 1: *Veneror itaque inventa sapientiae inventoresque: adire tamquam multorum haereditatem juvat. Mihi ista acquisita, mihi laborata sunt. Sed agamus bonum patremfamilias; faciamus amphiora quae accepimus. Major ista haereditas a me ad posteros transeat . . . . . Sed etiamsi omnia a veteribus inventa sunt, hoc semper novum erit, usus et inventorum ab aliis scientia et dispositio.*

Fine

INDICE
DELLE MATERIE
CONTENUTE NEL PRESENTE TRATTATO

CONSIGLIO GENERALE DI PUBBLICA ISTRUZIONE.

Napoli 20 gennaio 1855.

Vista la dimanda del Tipografo Raffaele Tortora, il quale ha chiesto di porre a stampa l' opera: *Trattato completo di Topografia*, di Achille Flauti:

Visto il parere del Regio Revisore Signor D. Giuseppe Placente:

Si permette che la indicata opera si stampi; ma non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà, se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto, nel confronto, essere la impressione uniforme all' originale approvato.

Il Consultore di Stato Presidente Provvisorio
CAPOMAZZA

Il Segretario generale
GIUSEPPE PIETROCOLA